

**IN310**  
**Correction du contrôle continu du vendredi**  
**28/10/22**

**Exercice 1**

**Q.1**  $(A75E)_{16} = (1011\ 0111\ 0101\ 1110)_2 = (10\ 11\ 01\ 11\ 01\ 01\ 11\ 10)_2 = (22131132)_4$ .

On peut aussi passer par une écriture avec somme et puissances de 16 puis faire apparaître les puissances de 4 (mais c'est beaucoup plus long !)  
 $(A75E)_{16} = 10 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 5 \times 16 + 14$ . Or  $16 = 4^2$ ,  $10 = 2 \times 4 + 2$ ,  $7 = 4 + 3$ ,  $5 = 4 + 1$  et  $14 = 3 \times 4 + 2$ . D'où

$$(A75E)_{16} = (2 \times 4 + 2) \times 4^{3 \times 2} + (4 + 3) \times 4^{2 \times 2} + (4 + 1) \times 4^2 + (3 \times 4 + 2)$$

$$(A75E)_{16} = 2 \times 4^{1+6} + 2 \times 4^6 + 1 \times 4^{4+1} + 3 \times 4^4 + 1 \times 4^{2+1} + 1 \times 4^2 + 3 \times 4 + 2$$

$$(A75E)_{16} = 2 \times 4^7 + 2 \times 4^6 + 1 \times 4^5 + 3 \times 4^4 + 1 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 3 \times 4 + 2$$

$$(A75E)_{16} = (22131132)_4$$

**Q.2** On utilise ici la méthode générique vue en cours et en TD : divisions euclidiennes et lecture des restes dans le bon sens.

$$7821 = 2607 \times 3 + 0$$

$$2607 = 869 \times 3 + 0$$

$$869 = 289 \times 3 + 2$$

$$289 = 96 \times 3 + 1$$

$$96 = 32 \times 3 + 0$$

$$32 = 10 \times 3 + 2$$

$$10 = 3 \times 3 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

$$1 = 0 \times 3 + 1$$

$$0 = 0 \times 3 + 0$$

$$(7821)_{10} = (101201200)_3$$

## Exercice 2

**Q.1** Le calcul d'une addition en base  $b$  se fait comme pour la base 10, il faut seulement prendre en compte la retenue lorsqu'on dépasse  $b$ .

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \\ \phantom{+} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \\ + \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \\ \hline = \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \phantom{=} \end{array}$$

$$(73054)_8 + (66427)_8 = (161503)_8$$

**Q.2** En base  $b$ , la multiplication de  $a$  par une puissance de  $b$ , par exemple  $b^5$  s'observe par un décalage de l'écriture de  $a$  en base  $b$  de 5 positions vers la gauche (et on comble les 5 positions vides par des 0). On peut évidemment poser la multiplication, mais c'est plus long...  $(765)_8 \times (8^5)_{10} = (76500000)_8$ .

## Exercice 3

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $P(n)$  la propriété suivante: " $9^n - 5^n$  est divisible par 4". Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vérifiée pour tout  $n \geq 1$ .

**Initialisation** Pour commencer, montrons que la propriété est vérifiée au premier rang, *i.e.*, montrons que  $P(1)$  est vérifiée<sup>1</sup>.

$$9^1 - 5^1 = 4 \text{ et } 4 \mid 4 \text{ donc } P(1) \text{ est bien vérifiée.}$$

**Hérédité** Montrons désormais la propriété suivante :

"Pour tout  $n \geq 1$ , si  $P(n)$  est vérifiée, alors  $P(n+1)$  est aussi vérifiée".

Soit  $n \geq 1$ .<sup>2</sup> Supposons la propriété  $P(n)$  vérifiée. Montrons alors que  $P(n+1)$  l'est aussi.<sup>3</sup>

$$9^{n+1} - 5^{n+1} = 9 \times 9^n - 5 \times 5^n = (5+4) \times 9^n - 5 \times 5^n = 5(9^n - 5^n) + 4 \times 9^n.$$

Or, par hypothèse (de récurrence), il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $9^n - 5^n = 4k$ . On en déduit donc:

$$9^{n+1} - 5^{n+1} = 5(9^n - 5^n) + 4 \times 9^n = 5 \times 4k + 4 \times 9^n = 4(5k + 9^n)$$

Ainsi,  $9^{n+1} - 5^{n+1}$  est bien divisible par 4 et  $P(n+1)$  est vérifiée.

On a donc montré que, quelque soit  $n \geq 1$ , si  $P(n)$  est vérifiée, alors  $P(n+1)$  est aussi vérifiée.

<sup>1</sup>Ici on veut montrer une propriété pour tout entier supérieur ou égal à 1, le premier d'entre eux est 1, pas 0 !

<sup>2</sup>Comme dans la très grande majorité des cas, pour prouver une propriété commençant par un "pour tout", on commence par introduire un élément **quelconque**.

<sup>3</sup>Il s'agit ici d'une preuve directe, la manière la plus "naturelle" de montrer  $A \implies B$ , c'est bien de supposer A et de montrer que B est alors vérifiée.

**Conclusion** Puisque  $P(1)$  est vérifiée et que " $P(n) \implies P(n+1) \forall n \geq 1$ " est aussi vérifiée, on en déduit, par un raisonnement par récurrence, que  $P(n)$  est vérifiée pour tout  $n \geq 1$ .

## Exercice 4

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on introduit la fonction  $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,b}(x) = ax + b$ . (Il s'agit donc des fonctions affines.) L'objectif est de déterminer toutes les valeurs de  $(a, b)$  pour lesquelles la fonction  $f_{a,b}$  est injective (resp. surjective). Il faut donc vérifier **toutes les couples**  $(a, b)$ .

**Injectivité** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Supposons que  $a = 0$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $f_{a,b}(x) = b$ . On observe que l'image de  $x$  est toujours égale à  $b$ , (qui est **fixée** avant  $x$ ). Autrement dit, si  $a = 0$ , alors la fonction  $f_{a,b}$  est une fonction constante. En particulier, on observe que  $f_{a,b}(0) = b = f_{a,b}(1)$  mais  $0 \neq 1$ , donc la fonction n'est pas injective. On vient donc de montrer que si  $a = 0$ , alors  $f_{a,b}$  n'est pas injective.

Supposons désormais que  $a \neq 0$ . Soient  $x, x' \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $f_{a,b}(x) = f_{a,b}(x')$ . Alors  $ax + b = ax' + b$ . On peut alors soustraire  $b$  des deux côtés de l'équation, et on obtient alors  $ax = ax'$ . Mais par hypothèse,  $a \neq 0$ , on peut donc diviser des deux côtés de l'équation par  $a$  et on observe alors que  $x = x'$ . On vient donc de montrer que  $f_{a,b}$  est injective.

Finalement, on a complètement caractérisé (et prouvé) la (non-)injectivité des fonctions  $f_{a,b}$  : si  $a = 0$  alors  $f_{a,b}$  n'est pas injective. En revanche, si  $a \neq 0$ ,  $f_{a,b}$  est injective.

**Surjectivité** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Supposons que  $a = 0$ . Alors la fonction  $f_{a,b}$  est une fonction constante (prouvée dans la partie **Injectivité**). En particulier,  $f_{a,b}$  ne prend qu'une seule valeur :  $b$ . Soit  $y \in \mathbb{R}, y \neq b$  (par exemple  $y = b - 1$ ). Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}, f_{a,b}(x) = b \neq y$ . Donc  $y$  n'admet aucun antécédent par  $f_{a,b}$ . On vient donc de montrer que si  $a = 0$ , alors  $f_{a,b}$  n'est pas surjective.

Supposons désormais que  $a \neq 0$ . Soit  $y \in \mathbb{R}$ . On considère l'équation suivante, d'inconnue  $x$ .

$$y = ax + b$$

Puisque  $a \neq 0$ , on peut réécrire cette équation :

$$y = ax + b \iff y - b = ax \iff \frac{y - b}{a} = x$$

On observe alors que cette équation admet une solution  $x$ , à savoir,  $x = \frac{y-b}{a}$ . Autrement dit,  $y$  admet  $\frac{y-b}{a}$  comme antécédent par  $f_{a,b}$ .  $y$  est ici un élément

quelconque de  $\mathbb{R}$  : on vient finalement de montrer la surjectivité de  $f_{a,b}$ , dans le cas où  $a \neq 0$ .

Finalem<sup>ent</sup>, on a complètement caractérisé (et prouvé) la surjectivité des fonctions  $f_{a,b}$  : si  $a = 0$  alors  $f_{a,b}$  n'est pas surjective. En revanche, si  $a \neq 0$ ,  $f_{a,b}$  est surjective.

## Exercice 5

On considère les relations  $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$  (définies ci-dessous) sur l'ensemble  $A$ ,  $A := \{0, 1, 2, 3\}$ .

a)  $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

- **Réflexivité** :  $\mathcal{R}$  est bien réflexive : en effet les éléments de  $A$  sont 0, 1, 2, et 3 et les éléments  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(3, 3)$  appartiennent bien à  $\mathcal{R}$ .
- **Symétrie** :  $\mathcal{R}$  est bien symétrique : en effet soit  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Alors  $x = y$ . On en déduit donc immédiatement que  $(y, x) = (x, y) \in \mathcal{R}$ .
- **Anti-symétrie** :  $\mathcal{R}$  est anti-symétrique : puisque tous les éléments de  $\mathcal{R}$  sont de la forme  $(x, x)$ ,  $x \in A$ , il n'existe aucun élément de la forme  $(x, y)$ ,  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$  dans  $\mathcal{R}$ , et donc il n'existe en particulier pas de contre-exemple à l'anti-symétrie.
- **Transitivité** :  $\mathcal{R}$  est bien transitive : en effet, soient  $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$ . Alors d'après la structure de  $\mathcal{R}$ ,  $y = z$ . Donc,  $(x, z) = (x, y) \in \mathcal{R}$ .
- **Totalité** :  $\mathcal{R}$  n'est pas totale : en effet,  $0, 1 \in A$  mais  $(0, 1) \notin \mathcal{R}$  et  $(1, 0) \notin \mathcal{R}$ .

b)  $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$

- **Réflexivité** :  $\mathcal{S}$  n'est pas réflexive : en effet  $2 \in A$  mais  $(2, 2) \notin \mathcal{S}$ .
- **Symétrie** :  $\mathcal{S}$  est bien symétrique : en effet soit  $(x, y) \in \mathcal{S}$ . Si  $x = y$ , on en déduit immédiatement que  $(y, x) = (x, y) \in \mathcal{S}$  (c'est le cas pour  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ ). Sinon  $x \neq y$ . Dans ce cas  $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$ . On observe alors, par disjonction des cas que:
  - si  $x = 0$ , alors  $(x, y) = (0, 1)$  et  $(1, 0) \in \mathcal{S}$ .
  - si  $x = 1$ , alors  $(x, y) = (1, 0)$  et  $(0, 1) \in \mathcal{S}$ .
  - si  $x = 2$ , alors  $(x, y) = (2, 3)$  et  $(3, 2) \in \mathcal{S}$ .
  - si  $x = 3$ , alors  $(x, y) = (3, 2)$  et  $(2, 3) \in \mathcal{S}$ .

Donc  $\mathcal{S}$  est symétrique.

- **Anti-symétrie** :  $\mathcal{S}$  n'est pas anti-symétrique : en effet  $(1, 0) \in \mathcal{S}$ ,  $(0, 1) \in \mathcal{S}$  mais  $0 \neq 1$ .
- **Transitivité** :  $\mathcal{S}$  n'est pas transitive : en effet,  $(2, 3) \in \mathcal{S}$ ,  $(3, 2) \in \mathcal{S}$  mais  $(2, 2) \notin \mathcal{S}$ .
- **Totalité** :  $\mathcal{S}$  n'est pas totale : en effet,  $0, 2 \in A$  mais  $(0, 2) \notin \mathcal{S}$  et  $(2, 0) \notin \mathcal{S}$ .

c)  $\mathcal{T} = \{(1, 0), (1, 3), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

- **Réflexivité** :  $\mathcal{T}$  n'est pas réflexive : en effet  $0 \in A$  mais  $(0, 0) \notin \mathcal{T}$ .
- **Symétrie** :  $\mathcal{T}$  n'est pas symétrique : en effet  $(1, 0) \in \mathcal{T}$  mais  $(0, 1) \notin \mathcal{T}$ .
- **Anti-symétrie** :  $\mathcal{T}$  n'est pas anti-symétrique : en effet  $(1, 3) \in \mathcal{T}$ ,  $(3, 1) \in \mathcal{T}$  mais  $1 \neq 3$ .
- **Transitivité** :  $\mathcal{T}$  n'est pas transitive : en effet,  $(1, 3) \in \mathcal{T}$ ,  $(3, 2) \in \mathcal{T}$  mais  $(1, 2) \notin \mathcal{T}$ .
- **Totalité** :  $\mathcal{T}$  n'est pas totale : en effet,  $1, 2 \in A$  mais  $(1, 2) \notin \mathcal{T}$  et  $(2, 1) \notin \mathcal{T}$ .

## Exercice 6

a) On considère  $\mathcal{R}$  la relation sur  $\mathbb{R}$  définie par  $x\mathcal{R}y \iff xy \neq 0$ .

- **Réflexivité** :  $\mathcal{R}$  n'est pas réflexive : en effet  $0 \in \mathbb{R}$  mais  $0 \times 0 = 0$  donc  $0\not\mathcal{R}0$ .
- **Symétrie** :  $\mathcal{R}$  est symétrique : en effet soit  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que  $x\mathcal{R}y$ . Alors  $xy \neq 0$ . Or  $xy = yx$  donc  $yx \neq 0$ , d'où  $y\mathcal{R}x$ .
- **Transitivité** :  $\mathcal{R}$  est transitive : en effet soit  $(x, y), (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ . Alors  $xy \neq 0$  et  $yz \neq 0$ . On en déduit donc que  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  et  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ . En particulier,  $x \neq 0$  et  $z \neq 0$  donc  $xz \neq 0$ , d'où  $x\mathcal{R}z$ .

b) On considère  $\mathcal{S}$  la relation sur  $\mathbb{Z}$  définie par  $a\mathcal{S}b \iff a - b$  est divisible par 2 ou par 3.

- **Réflexivité** :  $\mathcal{S}$  est réflexive : en effet, soit  $a \in \mathbb{Z}$ . Alors  $a - a = 0$  et 0 est divisible par 2 :  $0 = 2 \times 0$ .

- **Symétrie** :  $\mathcal{S}$  est symétrique : en effet soit  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tel que  $a\mathcal{S}b$ . Alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a - b = 2k$  ou tel que  $a - b = 3k$ . Or  $b - a = -(a - b)$ , donc  $b - a = 2(-k)$  ou  $b - a = 3(-k)$ . On en déduit donc que  $b - a$  est divisible par 2 ou par 3 et donc  $b\mathcal{S}a$ .
- **Transitivité** :  $\mathcal{S}$  n'est pas transitive.  
En effet, prenons  $a = 5, b = 2, c = 4$ .  $a - b = 3$  est divisible par 3 donc  $a\mathcal{S}b$ .  $b - c = -2 = 2 \times (-1)$  est divisible par 2 donc  $b\mathcal{S}c$ . Mais  $a - c = 1$  et 1 n'est ni divisible par 2, ni divisible par 3. donc  $a\not\mathcal{S}c$ .