Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines | le 25 / 09 / 2023
Université Paris Saclay | Groupe de TD 3

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Corrigé CC2 - TD3

Exercice 1.

Soit G un groupe, H, K deux sous-groupes de G. Prouver la proposition suivante :

$$H \cup K \text{est un sous-groupe de } G \text{ si et seulement si } H \subset K \text{ ou } K \subset H.$$

Réponse.

Prouvons cette équivalence par double implication.

Sens direct $\implies$

Supposons donc : $H \cup K$ est un sous-groupe de G et prouvons par l'absurde [$H \subset K$ ou $K \subset H$]. Supposons donc $K \not\subset H$ et $H \not\subset K$.

Autrement dit, il existe $h \in H$ tel que $h \notin K$ et $k \in K$ tel que $k \notin H$. Soient un tel h et un tel k. Puisque h et k appartiennent au sous-groupe $H \cup K$ de G, le produit $h * k$ appartient lui aussi à $H \cup K$. Donc de deux choses l'une, soit $h * k$ appartient à H, soit $h * k$ appartient à K.

Supposons que $h * k$ appartient à H, alors il existe $h' \in H$ tel que $h * k = h'$, et en multipliant à gauche par h^{-1} des deux côtés de l'égalité et en simplifiant, on obtient $k = h^{-1} * h'$. Ainsi, puisque h, h' et donc $h^{-1} * h'$ appartiennent à H (car H est un sous-groupe), on en déduit $k \in H$. Ceci est absurde car par définition $k \in K \setminus H$.

De même, supposons que $h * k$ appartient à K. Alors il existe $k' \in K$ tel que $h * k = k'$, d'où l'on déduit $h = k' * k^{-1} \in K$ ce qui est absurde car $h \notin K$.

Finalement l'hypothèse $K \not\subset H$ et $H \not\subset K$ s'avère absurde. On en déduit donc que [$H \subset K$ ou $K \subset H$].

Sens indirect $\impliedby$

Supposons [$H \subset K$ ou $K \subset H$]. Dans le premier cas $H \cup K = K$ donc $H \cup K$ est un sous-groupe de G puisque K en est un. Dans le second, $H \cup K = H$ donc $H \cup K$ est un sous-groupe de G puisque H en est un. Dans tous les cas, $H \cup K$ est donc un sous-groupe de G ce qui prouve l'implication indirecte.

Conclusion

Par double implication, nous avons prouvé l'équivalence recherchée.

Exercice 2.

Soit $*$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x * y := (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$.
Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Réponse.

Associativité Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On observe :

$$(x * y) * z = \left(\left((x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} \right)^3 + z^3 \right)^{\frac{1}{3}} = (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(x^3 + (y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} = x * (y * z).$$

Ainsi $(x * y) * z = x * (y * z)$ et ce pour tout x, y, z de $\mathbb{R}$, la loi est donc associative.

Existence d'un élément neutre Soit $x \in \mathbb{R}$. On observe que $x * 0 = (x^3 + 0^3)^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$. De même $0 * x = (0^3 + x^3)^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$. On en déduit donc que 0 est un élément (plus exactement l'élément) neutre pour $*$.

> **Remarque.** Si on ne voit pas quel peut être l'élément neutre, on peut raisonner par analyse-synthèse : supposons que z est l'élément neutre. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $(x^3 + z^3)^{1/3} = x$. En mettant au cube cette égalité on obtient, $x^3 + z^3 = x^3$, ainsi en simplifiant par x^3 on obtient $z^3 = 0$ et donc $z = 0$. Ainsi le seul candidat à être l'élément neutre est 0. Il reste à le prouver comme fait ci-dessus.

Existence d'un inverse pour tout x Soit $x \in \mathbb{R}$. On observe que

$$x * -x = \left(x^3 + (-x)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^3 + (-1)^3 x^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^3 - x^3\right)^{\frac{1}{3}} = 0^{\frac{1}{3}} = 0,$$

où l'on a utilisé la multiplicativité de l'exponentiation. On prouve de même que $-x * x = 0$. Ainsi, l'inverse de x pour $*$ est $-x$. Nous avons donc prouvé que tout élément a bien un inverse.

Finalement, nous avons bien montré que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

> **Remarque.** Si on ne voit pas quel peut être l'inverse d'un élément, on peut raisonner par analyse-synthèse : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que y est l'inverse de x. Alors $(x^3 + y^3)^{1/3} = 0$. En mettant au cube cette égalité on obtient, $x^3 + y^3 = 0$, ainsi en simplifiant par $y^3 = -x^3 = (-x)^3$. En passant l'égalité puissance 1/3 (racine cubique), on obtient $y = -x$. Ainsi le seul candidat à être l'inverse de x est $-x$. Il reste à le prouver comme fait ci-dessus.

Commutativité Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} = (y^3 + x^3)^{\frac{1}{3}} = y * x$ où l'on a utilisé pour l'égalité centrale, la commutativité de l'addition. Ainsi $x * y = y * x$ quelque soient $x, y \in \mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, *)$ est donc un groupe commutatif.