Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Université Paris Saclay

le 26 / 09 / 2023

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Corrigé CC3 - TD1/2

Questions :

1. Donner les éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$
2. Résoudre le système d'équations suivant dans l'ensemble des entiers ($\mathbb{Z}$). Donner toutes les solutions possibles s'il y en a.

$$\begin{cases} x = 7 & \mod 11 \\ x = 11 & \mod 15 \end{cases}$$

1.

D'après le cours, les éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont les (classes des) éléments $a \in \{0, \cdots, 8\}$ qui vérifient $\text{pgcd}(a, 9) = 1$, autrement dit les éléments premiers avec 9.

9 est premier avec 1, 2, 4, 5, 7, 8 mais pas avec 3 et 6 (qui partagent avec 9 le diviseur 3) et ni avec 0 (avec qui 9 partage 9 comme diviseur). Les inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont donc 1, 2, 4, 5, 7, 8.

2.

On observe tout d'abord que 11 et 15 sont premiers entre eux (car 11 est un nombre premier et 11 ne divise pas 15). Ainsi, d'après le théorème des restes chinois, le système admet une infinité de solution entière (mais une unique solution modulo $11 \times 15 = 165$). Cherchons donc une solution entière particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$, l'ensemble S des solutions sera alors de la forme :

$$S = \{x_0 + 165, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Commençons par trouver un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $15u + 11v = 1$ grâce à l'algorithme d'Euclide étendu.

$$\begin{aligned}
15 &= 15 \times 1 + 11 \times 0 \\
11 &= 15 \times 0 + 11 \times 1 \\
4 &= 15 \times 1 + 11 \times (-1) \quad && L_3 = L_1 - L_2 \\
3 &= 15 \times (-2) + 11 \times 3 \quad && L_4 = L_2 - 2L_3 \\
1 &= 15 \times 3 + 11 \times (-4) \quad && L_5 = L_3 - L_4
\end{aligned}$$

Ainsi $(u, v) = (3, -4)$ convient.

> **Remarque.** Si une solution particulière nous "saute rapidement aux yeux", on peut tout à fait éviter l'utilisation de l'algorithme d'Euclide étendu (AEE) et l'introduire directement. l'AEE reste néanmoins la méthode qui fonctionne **toujours**, contrairement aux solutions "évidentes".

Ainsi $15u + 11v = 1$. En réduisant cette égalité modulo 15, on déduit que $11v \equiv 1 \mod 15$ et en la réduisant modulo 11, on déduit que $15u \equiv 1 \mod 11$. En notant que $15u = 45$ et $11v = -44$, on a donc :

$$\begin{cases} 45 \equiv 1 & \mod 11 \\ 45 \equiv 0 & \mod 15 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -44 \equiv 0 & \mod 11 \\ -44 \equiv 1 & \mod 15 \end{cases}$$

Ainsi, en multipliant 45 par 7 et -44 par 11, on obtient :

$$\begin{cases} 7 \times 45 \equiv 7 \times 1 \equiv 7 \mod 11 \\ 7 \times 45 \equiv 7 \times 0 \equiv 0 \mod 15 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 11 \times -44 \equiv 11 \times 0 \equiv 0 \mod 11 \\ 11 \times -44 \equiv 11 \times 1 \equiv 11 \mod 15 \end{cases}$$

Enfin en additionnant les équations ci-dessus, on obtient alors :

$$\begin{cases} 7 \times 45 + 11 \times (-44) \equiv 7 + 0 \equiv 7 \mod 11 \\ 7 \times 45 + 11 \times (-44) \equiv 0 + 11 \equiv 11 \mod 15 \end{cases}.$$

Ainsi $7 \times 45 + 11 \times (-44) = 315 - 484 = -169$ est une solution du système.

On en déduit finalement $S = \{-169 + 165k, k \in \mathbb{Z}\}$ (ou de manière équivalente $-169 \equiv -4 \equiv 161 \mod 165$ est l'unique solution modulo 165).