Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Université Paris Saclay le 29/09/2023

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Calculatrice interdite.

Corrigé CC4 - TD 1 , 2 et 3

Question 1 (TD 1, 2, et 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de chiffres (resp. de chiffres 9) dans l'écriture en base 10 du nombre $(10^n+1)(10^n-1)$? Il s'agit en fait de la même question.

0) Commençons avec des exemples pour $n = 1, 2, 3$. Pour $n = 1$:
$(10^1+1)(10^1-1) = 11 \times 9 = 99$ donc pour $n = 1$, deux 9 dans l'écriture décimale.
$(10^2+1)(10^2-1) = 101 \times 99 = 100 \times 99 + 1 \times 99 = 9900 + 99 = 9999$ donc pour $n = 2$, quatre 9 dans l'écriture décimale.
$(10^3+1)(10^3-1) = 1001 \times 999 = 1000 \times 999 + 1 \times 999 = 999000 + 999 = 999999$ donc pour $n = 3$, six 9 dans l'écriture décimale.
De ces exemples, on semble extrapoler que dans l'écriture décimale de $(10^n+1)(10^n-1)$, 9 apparait $2n$ fois. Prouvons le formellement.

1) Montrons tout d'abord que pour tout $n \geq 1$, $10^n - 1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^i$. Prouvons le par récurrence.

Initialisation : au rang $n = 1$, on observe que $10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$ et $9 = 9 \times 10^0 = \sum_{i=0}^{1-1} 9 \times 10^i$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose l'égalité $10^n - 1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^i$ vérifiée. Montrons alors que l'égalité $10^{n+1} - 1 = \sum\limits_{i=0}^{n} 9 \times 10^i$ est aussi vérifiée. Partons de la partie gauche de l'égalité à montrer.

$$10^{n+1} - 1 = (10^n \times 10) - 1 = (10^n \times 10) - 1 + 10 - 10 = (10^n \times 10) + 9 - 10 = 10(10^n - 1) + 9.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$10^{n+1} - 1 \underset{(1)}{=} 10\left(\sum_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^i\right) + 9 \underset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^{i+1} + 9 \underset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{n} 9 \times 10^j + 9 \underset{(4)}{=} \sum_{j=0}^{n} 9 \times 10^j,$$

où l'on a successivement :
(1) utilisé l'hypothèse de récurrence,
(2) distribué 10 à tous les termes de la somme,
(3) changé d'indice ($j = i + 1$),
(4) fait "rentrer" 9 comme premier terme de la somme car $9 = 9 \times 10^0$, d'où le nouveau terme $j = 0$.

Ainsi l'égalité $10^{n+1} - 1 = \sum\limits_{i=0}^{n} 9 \times 10^i$ est vérifiée et la propriété est donc héréditaire.

Conclusion : d'après le cas de base et le caractère héréditaire de la propriété, on en déduit que l'égalité $10^n - 1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^i$ est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

Preuve alternative beaucoup plus rapide. Il n'était pas forcément attendu une rédaction aussi précise pour cette première partie de réponse. En effet, on peut tout a fait justifier cette égalité de la façon suivante : 10^n est le plus petit entier naturel avec exactement $n+1$ chiffres dans son écriture décimale. Ainsi $10^n - 1$ est le plus grand entier naturel avec exactement n chiffres dans son écriture décimale $(\star)$. Donc $10^n - 1$ a pour forme $10^n - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ où $a_i \in \{0, \cdots, 9\}$ pour tout i. Mais nécessairement $a_i = 9$ pour tout $i \in \{0, \cdots n-1\}$, sinon il existerait un entier avec une écriture décimale à n chiffres strictement plus grand que $10^n - 1$ ce qui contredirait (absurde, donc) la maximalité (*c.f.* $(\star)$) de $10^n - 1$. Donc $10^n - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 9 \times 10^i$.

2) Il ne reste plus qu'à utiliser la formule de $10^n - 1$. Soit $n \geq 1$.

$$(10^n+1)(10^n-1) \underset{(1)}{=} (10^n+1)\sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^i \underset{(2)}{=} 10^n \sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^i + 1\sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^i \underset{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^{n+i} + \sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^i = (*)$$

$$(*) \underset{(4)}{=} \sum_{j=n}^{n+n-1} 9\times 10^j + \sum_{i=0}^{n-1} 9\times 10^i \underset{(5)}{=} \sum_{i=0}^{2n-1} 9\times 10^i.$$

où l'on a successivement :
- (1) utilisé l'égalité précédemment prouvée,
- (2) développé la parenthèse extérieure,
- (3) distribué le 10^n dans la première somme,
- (4) changé d'indice ($j = n+i$) dans la première somme,
- (5) regroupé les deux sommes en une seule.

D'où :

$$(10^n+1)(10^n-1) = \sum_{i=0}^{2n-1} 9\times 10^i.$$

3) Conclusion Ainsi l'écriture décimale de $(10^n+1)(10^n-1)$ est exclusivement constituée de 9. Il y en a exactement $2n$, d'après la formule ci-dessus.

Question 2 (TD 3)

Shéhérazade décide de raconter chaque soir 3 contes parmi les 1001 contes qu'elle connaît. Combien de soirées différentes peut-elle faire ? Deux soirées sont différentes si elles diffèrent d'au moins un conte. Justifier et simplifier le résultat.

Réponse Si l'on considère l'ensemble des contes, Shéhérazade choisit un sous-ensemble de 3 contes pour une soirée. La condition sur les soirées différentes signifie simplement que Shéhérazade ne peut pas choisir deux fois le même sous-ensemble à 3 éléments. Ainsi le nombre de soirées différentes possibles correspond exactement au nombre de sous-ensembles à 3 éléments parmi un ensemble à 1001 éléments. C'est exactement la définition du coefficient binomial $\binom{1001}{3}$, qui peut se simplifier facilement :

$$\binom{1001}{3} = \frac{1001\times 1000\times 999}{3!} = \frac{1001\times 1000\times 999}{3\times 2} = 1001\times 500\times 333 \quad (= 166\ 666\ 500)$$

.

D'où $166\ 666\ 500$ soirées différentes possibles.

Question 2 (TD 1 et 2)

Les 101 dalmatiens partent en voyage, mais le bus qui les emmène ne peut contenir que 98 chiens. Il y en aura 3 qui suivront dans une voiture. De combien de manières différentes peut-on répartir les 101 dalmatiens entre le bus et la voiture ?

Réponse Si l'on considère l'ensemble des chiens, le seul choix à effectuer est de choisir un sous-ensemble de 3 chiens pour la voiture (une fois ce choix effectué, il reste 101-3 = 98 qui logeront tous dans le bus). Le nombre de choix différents possibles correspond donc exactement au nombre de sous-ensembles à 3 éléments parmi un ensemble à 101 éléments. C'est exactement la définition du coefficient binomial $\binom{101}{3}$, qui peut se simplifier facilement :

$$\binom{101}{3} = \frac{101 \times 100 \times 99}{3!} = \frac{101 \times 100 \times 99}{3 \times 2} = 101 \times 50 \times 33 \quad (= 166\ 650)$$

.

D'où $166\ 650$ manières différentes de les répartir.