

LSIN310 (Maths pour l'Info) – Examen première session

- Durée : 2h
- Les documents (cours comme TDs) sont interdits. Les supports numériques (calculatrice, portable, tablette, ordinateur, montre connectée, etc.) sont interdits.
- Le barème (sur 20) est indicatif. Toute erreur dans le sujet sera prise en compte dans la correction.
- **Toutes les réponses doivent être justifiées.** Une réponse partielle mais justifiée sera plus valorisée qu'une réponse juste mais non détaillée.
- Le sujet est recto-verso (**4 exercices**).

Rappel (Partition d'un ensemble). Soit E un ensemble. Soit E_1, \dots, E_s des sous-ensembles de E . E_1, \dots, E_s forment une partition de E si :

- a) $\forall 1 \leq i, j \leq s, [E_i \neq E_j \implies E_i \cap E_j = \emptyset]$.
- b) $E = \bigcup_{i=1}^s E_i$. ($\bigcup_{i=1}^s E_i$ signifie $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s$)
- c) $\forall 1 \leq i \leq s, E_i \neq \emptyset$.

Rappel. Soit E, F deux ensembles et $f: E \rightarrow F$ une application. Soit $y \in F$. On rappelle que le sous-ensemble $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ est défini par :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E, f(x) = y\}.$$

Exercice 1 (Fonctions, relations et partitions – 8pts).

1. **Question de cours.** Quels liens y a-t-il entre relation d'équivalence sur E et partition de E ?

On considère les applications g et h suivantes :

$$g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$x \mapsto x^2$$

$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$
$$x \mapsto r;$$

où r est le reste de la division euclidienne de x par 4.

2. Déterminer $g^{-1}(\{0\}), g^{-1}(\{1\}), g^{-1}(\{2\}), g^{-1}(\{3\})$ et $g^{-1}(\{4\})$. S'agit-il d'une partition de l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$? Si c'est le cas, quelle est la relation associée ?
3. Déterminer $h^{-1}(\{0\}), h^{-1}(\{1\}), h^{-1}(\{2\}), h^{-1}(\{3\})$. S'agit-il d'une partition de \mathbb{Z} ? Si c'est le cas, quelle est la relation associée ?

Soit E un ensemble. Soit $F = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ un ensemble de cardinal $s \geq 1$. Soit $f: E \rightarrow F$ une application. On souhaite savoir à quelle(s) condition(s) la famille $f^{-1}(\{y_1\}), \dots, f^{-1}(\{y_s\})$ forme une partition de E (ou non).

4. **Question de cours.** Que signifie la propriété **b)** dans la définition de partition rappelée ci-dessus ?
5. **Question de cours.** Rappeler la définition d'une application entre E et F .

6. En déduire que :

(a) $\forall 1 \leq i, j \leq s, [i \neq j \implies f^{-1}(\{y_i\}) \cap f^{-1}(\{y_j\}) = \emptyset]$.

(b) $E = \bigcup_{i=1}^s f^{-1}(\{y_i\})$.

7. Montrer que f est surjective si et seulement si elle vérifie la propriété (*) ci-dessous :

$$\forall 1 \leq i \leq s, f^{-1}(\{y_i\}) \neq \emptyset. \quad (*)$$

8. À quelle(s) condition(s) la famille $f^{-1}(\{y_1\}), \dots, f^{-1}(\{y_s\})$ forme-t-elle une partition de E ?

Exercice 2 (Arithmétique – 7pts).

1. **Question de cours.** Énoncer la définition de la divisibilité sur \mathbb{Z} .
2. **Question de cours.** On considère la relation « est divisible par » sur \mathbb{Z} . Prouver qu'il s'agit d'une relation réflexive, transitive, mais **pas** anti-symétrique.
3. $3^{123} + 1$ est-il divisible par 7 ?
4. 38 est-il inversible pour la multiplication modulo 445 ? Si oui quel est son inverse ?
5. Combien d'éléments admettent un inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?
6. $(\mathbb{Z}/153\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 3 (Matrices et récurrence – 3pts). Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq c$. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B_1 = A \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B_{n+1} = A \times B_n.$$

1. Dans cette question uniquement, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Que vaut alors B_3 ?
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \begin{pmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a - c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Algèbre linéaire – 2pts). On considère la matrice M à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq i \leq 4$, on note L_i la i -ème ligne de M . L_1, L_2, L_3, L_4 sont donc des vecteurs de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$.

1. Quelle est l'application linéaire associée à M ?
2. La famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est-elle une famille libre de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$?
3. La famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est-elle une famille génératrice de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$?