UVSQ – Université Paris Saclay
L2 Informatique

Décembre 2025
Sujet 2

LSIN310 (Maths pour l'Info) – CC 2

NOM	Prénom	Numéro étudiant	Tiers-temps/ Aménagement
		2 ☐☐☐☐☐☐☐	☐ Oui ☐ Non

- Durée : 1h20 (pour les étudiant.e.s disposant d'un aménagement, le barème sera adapté.)
- Les documents (cours comme TDs) sont interdits. Les supports numériques (calculatrice, portable, tablette, ordinateur, *etc.*) sont interdits.
- Le barème (sur 20) est indicatif. Toute erreur dans le sujet sera prise en compte dans la correction.
- Les réponses doivent être justifiées. Une réponse partielle mais justifiée sera plus valorisée qu'une réponse juste mais non détaillée.

Exercice 1 (Fonctions, mots binaires et entiers naturels – 6pts)**.** On considère l'ensemble $H_5 = \{0,1\}^5$ formés des mots binaires de longueur 5. Soit $f\colon H_5 \to \mathbb{N}$ l'application définie par :

$$f\colon H_5 \to \mathbb{N} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Par exemple $f(1,0,1,1,1) = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 4$.

1. Quel est le cardinal de H_5 ?
2. La fonction est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Énumérer les éléments de $f^{-1}(\{2\})$

On considère maintenant une application $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est surjective et qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \geq n$.

4. Montrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = n$.
5. **Question de cours.** Comment s'appelle cette fonction ?

   Réponse: ________________________________

Exercice 2 (Structure multiplicative de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – 6pts)**.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de sa multiplication.

1. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ forme-t-il un groupe ?
2. **Question de cours.** Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quel est le nom de la propriété $(\star)$ ci-dessous ?

$$\exists y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad x \times y = 1 \tag{$\star$}$$

   Réponse: ________________________________

On considère le sous-ensemble $H \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par

$$H = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ \mid \ \exists y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \ x \times y = 1\}.$$

3. Soit $x, z \in H$. Montrer que $x \times z \in H$.
4. L'application $\times : H \times H \to H$ est donc bien définie. Montrer que $(H, \times)$ forme un groupe.

Exercice 3 (Arithmétique – 8pts).

1. **Question de cours.** Énoncer la définition de la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$.

   Réponse: ________________________________

2. **Question de cours.** Énoncer le théorème de Bézout.

   Réponse: ________________________________

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par disjonction de cas sur la classe de n modulo 3, montrer que :

$$n(n^2 + 5) \equiv 0 \bmod 3.$$

4. (a) Calculer une identité de Bézout entre 35 et 153.
   (b) Décrire l'ensemble des solutions $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $35x + 153y = 7$.
   (c) Que vaut 153 modulo 35 ?
   (d) 13 admet-il un inverse modulo 35 ? Si oui quel est il ?