Chapitre 5 : Algébre linéaire

1 Espace vectoriel et fonctions linéaires

Définition 1.1 (Espace vectoriel)**.** Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Soit E un ensemble non-vide muni d'une loi interne $+_E \colon E \times E \to E$ et d'une loi de composition externe $\cdot \colon \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(i) $(E, +_E)$ est un groupe abélien.

(ii) distributivité à gauche et à droite

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) +_E (\mu \cdot x), \text{ et}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x +_E y) = (\lambda \cdot x) +_E (\lambda \cdot y).$$

(iii) associativité mixte $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

(iv) neutre à gauche $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Les éléments de E sont alors appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Proposition 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors :*

1. $\forall x \in E, \quad (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot x = 0_E \iff x = 0_E$ *ou* $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 1.3 (Application linéaire)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'application $f \colon E \to F$ est dite linéaire si elle vérifie :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

Autrement dit une application est dite linéaire si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

2 Famille génératrice, famille libre, base

Définition 2.1 (Famille génératrice, famille libre, base)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $(v_1, \ldots, v_s)$ des vecteurs de E. On dit que :

Famille libre $(v_1, \ldots, v_s)$ est une famille libre si la seule combinaison linéaire des v_i égale au vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = 0_E \implies \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, s]\!].$$

Dans le cas contraire, on dit que $(v_1, \ldots, v_s)$ sont liés.

Famille génératrice $(v_1, \dots, v_s)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des v_i :

$$\forall v \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}, \quad v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i.$$

Base $(v_1, \dots, v_s)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice.

Si E admet une famille génératrice finie, alors on dit que E est un espace vectoriel finiment engendré.

Théorème 2.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev.*

— *Si $E \neq \{0\}$, alors E admet une famille libre.*

— *Si E est finiment engendré, alors E admet une base. De plus toutes les bases de E ont même cardinal, appelé dimension de E.*

— *Si $(u_1, \dots, u_\ell), (v_1, \dots, v_s), (w_1, \dots, w_r)$ sont respectivement une famille libre, une base et une famille génératrice de E, alors on a $\ell \leq s \leq r$.*

3 Fonctions linéaires et matrices

Définition 3.1 (Matrice)**.** Une matrice à n lignes et m colonnes est notée :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes m colonnes dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$.

— L'addition de matrices est définie pour des matrices de même taille et s'effectue coordonnée par coordonnée. $+ \colon \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

— La multiplation de matrices est définie par $\times \colon \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{\ell,m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (le nombre de colonne de la 1ere doit etre égale au nombre de ligne de la deuxième).

— Si $C = A \times B$ alors $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{\ell} a_{i,j} b_{k,j}$. La multiplication matrice vecteur correspond au cas particulier où B a une colonne seulement ($m = 1$).

Proposition 3.2 (Structure des espaces de matrices)**.** — *$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition de matrices et de la multiplication scalaire est un $\mathbb{K}$-ev de dimension nm.*

— *$(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.*

Proposition 3.3 (Caractérisation des applications linéaires)**.** *Soit $f \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ une application. f est linéaire si et seulement si il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m, f(x) = Ax.$$

Quelques propriétés des applications linéaires

Définition 3.4 (Sous-espace vectoriel)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si :

(i) F est un ensemble non-vide.

(ii) F est stable par combinaison linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

De manière équivalente $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si on peut restreindre $+_E \colon E \times E \to E$ et $\cdot_E \colon \mathbb{K} \times E \to E$ en deux lois de F $+_F \colon F \times F \to F$ et $\cdot_F \colon \mathbb{K} \times F \to F$.

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension n est de dimension finie n' où $n' \leq n$.

Si $f \colon E \to F$ est une application linéaire, on note $\mathrm{Im}(f) \coloneqq f(E) = \{f(x), x \in E\}$ l'image de f et le noyau (kernel) de f $\ker(f) \coloneqq f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0\}$.

Proposition 3.5 (Propriétés des fonctions linéaires)**.** *Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \colon E \to F$ une application linéaire. Alors :*

1. $f(0) = 0$.
2. $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E et* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F. On appelle rang la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Thèoréme du rang. Si E et F sont de dimensions finies alors* $\dim(E) = rg(f) + \dim\ker(f)$.
4. *f est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice traité en cours

Exercice 1. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Les vecteurs $L_1 = (1, 2, 3, 4), L_2 = (3, 1, 2, 0), L_3 = (2, 3, 1, 0)$ sont-ils liés ?
2. Les vecteurs $C_1 = (1, 3, 2), C_2 = (2, 1, 3), C_3 = (3, 2, 1), C_4 = (4, 0, 0)$ sont-ils liés ?
3. Quelle est l'application linéaire associée à M ?
4. Quelle est l'image de e_1, e_2, e_3, e_4 ? Que remarque-t-on ? Est-ce si étonnant ?
5. Déterminer le noyau de la matrice.
6. Déterminer le rang de la matrice.
7. Déterminer l'image de la matrice.
8. Même question en considérant M dans $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Correction.

1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = (0,0,0,0)$. Autrement dit, on cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 1\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

   La quatrième équation implique immédiatement $4\lambda_1 = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$. En remplaçant λ_1 par 0 dans la deuxième et troisième équation on obtient alors $\lambda_2 = -3\lambda_3$ et $\lambda_3 = -2\lambda_2$. Si ces deux équations sont vérifiées simultanément alors $\lambda_3 = -2\lambda_2 = -2 \times -3\lambda_3$ donc $\lambda_3 = 6\lambda_3$. Autrement dit, $5\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_3 = 0$ et finalement $\lambda_2 = -3\lambda_3 = -3 \times 0 = 0$. Ainsi, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont solutions du système alors nécessairement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L_1, L_2, L_3 forment donc une famille libre.

2. C_1, C_2, C_3, C_4 sont 4 vecteurs de l'ev $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Ils sont donc nécessairement liés, cf les inégalités du dernier point de Théorème 2.2.

3. L'application linéaire associée à M est l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3) \end{aligned}$$

4. On observe que $f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,3,2) = C_1$. De même, $f(e_2) = C_2$, $f(e_3) = C_3$, $f(e_4) = C_4$. Par définition, les colonnes de la matrice associée à une fonction linéaire sont les images (dans la base du co-domaine) des vecteurs de la base du domaine.

5. Le noyau de la matrice est par définition l'ensemble $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^4, f(x) = (0,0,0)\}$. Il s'agit donc de résoudre le système $f(x) = (0,0,0)$ ou autrement dit le système suivant d'inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ est solution alors $x_3 = -2x_1 - 3x_2$ d'après la dernière équation. Donc, en remplaçant dans la deuxième, on a nécesairrement, $3x_1 + x_2 + 2(-2x_1 - 3x_2) = 0$, c'est-à-dire $-x_1 - 5x_2 = 0$ ou encore $x_1 = -5x_2$. En remplaçant x_1 par $-5x_2$ dans $x_3 = -2x_1 - 3x_2$ cela implique donc que $x_3 = 10x_2 - 3x_2 = 7x_2$. Finalement en remplaçant x_1 et x_3 dans la première équation, on obtient $(-5 + 2 + 3 \times 7)x_2 + 4x_4 = 0$, c'est-à-dire $x_4 = -\frac{18}{4}x_2 = -\frac{9}{2}x_2$. Ainsi, si x est solution du système alors $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5x_2, x_2, 7x_2, -\frac{9}{2}x_2) = x_2(-5, 1, 7, -\frac{9}{2})$. Autrement dit, $\ker(f) \subset \left\langle (-5, 1, 7, -\frac{9}{2}) \right\rangle$.

   Réciproquement, soit $y \in \left\langle (-5, 1, 7, -\frac{9}{2}) \right\rangle$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = (-5\lambda, \lambda, 7\lambda, -\frac{9}{2}\lambda)$ et on vérifie aisément que y est solution du système et donc que $y \in \ker(f)$. Donc $\left\langle (-5, 1, 7, -\frac{9}{2}) \right\rangle \subset \ker(f)$ et donc $\ker(f) = \left\langle (-5, 1, 7, -\frac{9}{2}) \right\rangle$ par double inclusion.

6. D'après le théorème du rang, on a $4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Or $\dim(\ker(f)) = 1$ d'après la question précédente donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.
7. On cherche $\mathrm{Im}(f)$. On sait que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ev de dimension $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ de l'ev $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. On a donc nécessairement égalité : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.