

Chapitre 2 : Ensembles et dénombrement

1 Théorie des ensembles

Définition 1.1 (Ensemble (définition intuitive)). Un ensemble est un regroupement (ou collection, famille) non-ordonné d'objets. Un objet contenu dans un ensemble est appelé *élément*. On dit d'un élément x d'un ensemble E qu'il *appartient* à cet ensemble, on note alors $x \in E$. Si un élément n'appartient pas à un ensemble, on note $x \notin E$.

Deux ensembles A, B sont dits égaux ($A = B$) s'ils sont constitués des mêmes éléments.


On note \emptyset l'ensemble qui ne contient pas d'élément (l'ensemble vide).

Définition 1.2 (Ensemble fini). Soit E un ensemble. S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E est constitué de n éléments, on dit que E est un ensemble *fini* et que le *cardinal* de E est n . On note alors $|E| = n$ (ou $\#E$ ou encore $\text{Card}(E)$). Si E n'est pas un ensemble fini, on dit que E est *infini*.

Définition 1.3 (Sous-ensemble). Soit A, B deux ensembles. On dit que A est un *sous-ensemble* de B (ou que A est contenu dans B) si tous les éléments de A sont également des éléments de B , autrement dit si :

$$\forall x, (x \in A \implies x \in B).$$

On note alors $A \subset B$. A est un *sous-ensemble strict* de B si $A \subset B$ et $A \neq B$. On note alors $A \subsetneq B$.

 **Attention 1.4.** Il ne faut pas confondre l'appartenance $x \in E$ (élément/ensemble) et l'inclusion $F \subset E$ (ensemble/ensemble). Il ne faut pas confondre $A \not\subset B$ (A n'est pas un sous-ensemble de B) et $A \subsetneq B$ (A est un sous-ensemble strict de B).

Proposition 1.5 (Sous-ensembles triviaux). Soit E un ensemble. Alors $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.

Proposition 1.6 (Double inclusion). Soit A, B deux ensembles. Alors $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Parties d'un ensemble

Définition 1.7 (Parties de E). L'ensemble des *parties* de E est l'ensemble constitué des sous-ensembles de E . On le note $\mathcal{P}(E)$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E de cardinal k .

Proposition 1.8 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_k(E)$). Soit k, n des entiers naturels et E, E' deux ensembles de cardinal n . Alors :

Coefficient binomial k parmi n . Le nombre de sous-ensembles à k éléments parmi n ne dépend pas de E, E' mais seulement de n et k : $|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(E')|$. On note alors $\binom{n}{k} := |\mathcal{P}_k(E)|$.

Nombre de sous-ensembles de E . Plus généralement, le nombre de sous-ensembles ne dépend pas de E, E' mais seulement de n : $|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}(E')| = 2^n$.

Produit cartésien, arrangement, permutations

Définition 1.9 (*n*-uplet). Le *n*-uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) est la collection ordonnée ayant a_1 comme 1er élément, a_2 comme deuxième, ... et a_n comme *n*-ième élément. Deux *n*-uplets (a_1, a_2, \dots, a_n) et (b_1, b_2, \dots, b_n) sont dit égaux si pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i = b_i$.

Définition 1.10 (Produit cartésien). Soit A_1, \dots, A_n des ensembles.

Le cas $n = 2$. L'ensemble $A_1 \times A_2$ est l'ensemble défini par : $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ et } a_2 \in A_2\}$.

Le cas général. Le produit $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est l'ensemble défini par :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n, a_i \in A_i\}$$

Le cas $A_1 = A_2 = \dots = A_n$. L'ensemble $A \times \dots \times A$ est plus généralement noté A^n .

Proposition 1.11 (Cardinal d'un produit cartésien). Soit A_1, \dots, A_n des ensembles finis. Alors $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$. En particulier $|A^n| = |A|^n$.

Définition 1.12 (Arrangement, permutation). Soit $n, k \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal n . On appelle *arrangement de taille de k* de E un k -uplet $(e_1, \dots, e_k) \in E^k$ constitués d'éléments tous *distincts*. Un arrangement de taille n de E est plus communément appelée une *permutation* de E .

Proposition 1.13 (Nombre d'arrangements et de permutations). Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$. Alors :

1. Les arrangements de taille k de E sont en nombre de $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ce nombre dépend uniquement de k et n et non de E et est noté A_n^k .
2. Les permutations de E sont en nombre de $n!$. Ce nombre dépend donc seulement de n .
3. $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Union, intersection, différence, complémentaire

Définition 1.14 (Union, intersection, différence, complémentaire). Soit A, B deux ensembles.

- (i) L'union de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou les deux) : $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- (ii) L'intersection de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui appartiennent à A et à B : $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.
- (iii) La différence de A et B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A mais pas à B : $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. Lorsque B est un sous-ensemble de A , on appelle cet ensemble le complémentaire de B dans A et on le note parfois \overline{B} .



Attention 1.15. La notation \overline{B} est ambiguë : seul l'ensemble B apparaît alors que \overline{B} dépend également de A qui est sous-entendu.

Proposition 1.16 (Cardinal de l'union, l'intersection et du complémentaire). Soit A, B deux ensembles finis. Alors :

- (i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(ii) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

Théorème 1.17 (Opérations sur les ensembles). Soit A, B, C des sous-ensembles de l'ensemble univers E . Alors :

Ensemble vide. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Idempotence. $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.

Complémentarité. $\overline{\overline{A}} = A$.

Commutativité. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

Associativité. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributivité. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Lois de De Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.