

Chapitre 1 : Logique et raisonnement

1 Logique propositionnelle

Définition 1.1 (Proposition). Une proposition P est un énoncé (dont la construction obéit à une certaine syntaxe) qui peut prendre, soit la valeur **Vrai**, soit la valeur **Faux**. Autrement dit, P est une proposition si l'on peut se poser la question « P est-elle vraie? » ou « P est-elle vérifiée? ».

On appelle *valeur de vérité* de P la réponse à cette question.

Définition 1.2 (Connecteurs logiques). Soit P, Q deux propositions.

- (i) La *négation* de P , notée $\neg P$ (ou « non P ») est la proposition vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.
- (ii) La *conjonction* de P et Q , notée $P \wedge Q$ (ou « P et Q ») est la proposition vraie lorsque P et Q sont vraies, et fausse sinon (*i.e.* lorsque l'une au moins de P et Q est fausse).
- (iii) La *disjonction* de P et Q , notée $P \vee Q$ (ou « P ou Q ») est la proposition vraie lorsque l'une au moins parmi P et Q est vraie et fausse sinon (*i.e.* lorsque P et Q sont fausses).



Attention 1.3. Le OU logique est un OU dit « inclusif », à ne pas confondre avec le OU « exclusif » de l'expression « thé ou café? ».

Théorème 1.4 (Principes de non-contradiction et du tiers exclu). Soit P une proposition.

Non-contradiction Par définition, P ne peut pas être vraie et fausse en même temps. Autrement dit, la proposition $P \wedge (\neg P)$ est fausse.

Tiers exclu Par définition, P ne peut pas prendre d'autre valeur que **Vrai** ou **Faux**. Autrement dit, la proposition $P \vee (\neg P)$ est vraie.

Définition 1.5 (Implication, équivalence, réciproque, contraposée). Soit P, Q des propositions.

- (i) L'*implication* de Q par P , notée $P \rightarrow Q$ est la proposition fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.
- (ii) La *réciproque* de $P \rightarrow Q$ est la proposition $Q \rightarrow P$.
- (iii) La *contraposée* de $P \rightarrow Q$ est la proposition $\neg Q \rightarrow \neg P$.
- (iv) L'*équivalence* de P et Q , notée $P \leftrightarrow Q$ est la proposition vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité et fausse sinon : $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.



Attention 1.6. Ne pas confondre \rightarrow et \Rightarrow , ni \leftrightarrow et \Leftrightarrow . Les symboles \Rightarrow et \Leftrightarrow indiquent que la valeur de vérité de $P \rightarrow Q$ et $P \leftrightarrow Q$ est **Vrai**.



Attention 1.7. Implication n'est pas causalité. Une implication $P \rightarrow Q$ peut être vraie, sans que ni P , ni Q le soit.

Théorème 1.8 (Règles de calculs). Soit P, Q, R deux propositions. Alors

Commutativité $P \vee Q \iff Q \vee P$ et $P \wedge Q \iff Q \wedge P$.

Double négation. $\neg(\neg P) \iff P$.

Associativité de la conjonction. $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$.

Associativité de la disjonction. $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$.

Distributivité de la conjonction sur la disjonction. $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Distributivité de la disjonction sur la conjonction. $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

1ère loi de De Morgan. $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$.

2ème loi de De Morgan. $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

Théorème 1.9 (Techniques de raisonnement). Soit P, Q des propositions. Alors :

Définition alternative de l'implication. $P \rightarrow Q \iff \neg P \vee Q$.

1ère définition alternative de l'équivalence. $P \leftrightarrow Q \iff (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

2ème définition alternative de l'équivalence. $P \leftrightarrow Q \iff \neg P \leftrightarrow \neg Q$.

Non-implication. $\neg(P \rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q$.

Implication et contraposée. $\neg Q \rightarrow \neg P \iff P \rightarrow Q$.

2 Logique des prédicats

Définition 2.1 (Prédicat). Un prédicat \mathcal{P} est une propriété portant sur un ou plusieurs objets donnés en paramètres.

Définition 2.2 (Quantificateurs). Soit \mathcal{P} un prédicat à un paramètre.

Quantificateur universel. La proposition « $\forall x, \mathcal{P}(x)$ » est vraie si *tout objet mathématique* vérifie le prédicat \mathcal{P} et fausse sinon (c'est-à-dire si au moins un objet ne vérifie pas cette propriété).

Quantificateur existentiel. La proposition « $\exists x, \mathcal{P}(x)$ » est vraie si *au moins un objet mathématique* vérifie le prédicat \mathcal{P} et fausse sinon (c'est-à-dire si aucun objet vérifie cette propriété).

Théorème 2.3 (Négation des quantificateurs). Soit \mathcal{P} un prédicat et E un ensemble. Alors :

Négation du quantificateur universel. $\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x \in E, \neg \mathcal{P}(x)$

Négation du quantificateur existentiel. $\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \forall x \in E, \neg \mathcal{P}(x)$

Pour nier une proposition contenant plusieurs quantificateurs, on remplace donc *tous* les \forall par des \exists et *tous* les \exists par des \forall et on nie le prédicat.

Théorème 2.4 (Principe de récurrence). Soit $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de propositions dépendant d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

(i) Initialisation. $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée, et que

(ii) Hérité. la proposition $Q : \langle \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1) \rangle$ est vérifiée.

Alors la proposition « $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ » est vraie.



Attention 2.5. La preuve de l'étape d'hérédité est la preuve d'un énoncé complexe (un \forall , un \rightarrow), il faut donc être *très méthodique*.

On prouve de manière quasi-identique les variantes suivantes de ce principe.

Théorème 2.6 (Variantes du principe de récurrence). Soit \mathcal{P} un prédicat à une variable entière $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

À partir du rang n_0 . Supposons que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que la proposition $Q : \langle \forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1) \rangle$ est vraie. Alors la proposition $\langle \forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \rangle$ est vraie.

Récurrence forte. Supposons que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que la proposition Q' suivante est vérifiée :

$$Q' : \forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n + 1).$$

Alors la proposition $\langle \forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \rangle$ est vraie.