Chapitre 3 : Relations et fonctions

1 Relations

Définition 1.1 (Relation)**.** Soit A, B deux ensembles. Une relation $\mathcal{R}$ entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$: $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$, on note alors $a\mathcal{R}b$.

Définition 1.2 (Relation réciproque)**.** Soit A, B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation entre A et B. La réciproque de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^c$, est la relation entre B et A définie par :

$$\mathcal{R}^c \coloneqq \{(b, a) \ \mid (a, b) \in \mathcal{R}\} \subset B \times A.$$

Définition 1.3 (Propriétés des relations)**.** Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur A (une relation entre A et lui-même). On dit que :

— $\mathcal{R}$ est *réflexive* si elle vérifie : $\forall a \in A,\ a\mathcal{R}a$.

— $\mathcal{R}$ est *symétrique* si elle vérifie : $\forall a, b \in A,\ a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$.

— $\mathcal{R}$ est *transitive* si elle vérifie : $\forall a, b, c \in A,\ a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$.

— $\mathcal{R}$ est *asymétrique* si elle vérifie : $\forall a, b \in A, \neg(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a)$.

— $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si elle vérifie : $\forall a, b \in A,\ (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.

— $\mathcal{R}$ est *totale* si elle vérifie : $\forall a, b \in A,\ a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$.

Définition 1.4 (Ordre et équivalence)**.** Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur A. On dit que :

— $\mathcal{R}$ est une relation d'*ordre* si elle est réflexive, transitive et antisymétrique. Si la relation est de plus totale, $\mathcal{R}$ est un d'*ordre total*, sinon c'est un *ordre partiel*.

— $\mathcal{R}$ est une relation d'*équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique.

— $\mathcal{R}$ est une relation d'*ordre strict* si elle transitive et asymétrique.

Attention 1.5. Un ordre strict n'est pas un ordre.

1.1 Relation d'équivalence et partition d'un ensemble

Définition 1.6 (Classe d'équivalence)**.** Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. La classe d'équivalence d'un élément $x \in A$ est le sous-ensemble $\mathcal{C}(x) \subset A$ défini par :

$$\mathcal{C}(x) \coloneqq \{a \in A \ \mid a\mathcal{R}x\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$, aussi appelé *ensemble quotient de A par $\mathcal{R}$*, est noté $A/\mathcal{R}$:

$$A/\mathcal{R} \coloneqq \{\mathcal{C}(x) \ \mid \ x \in A\}.$$

Proposition 1.7 (Représentant d'une classe d'équivalence.)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Soit $x, y \in A$. Alors $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(x)$ si et seulement si $y \in \mathcal{C}(x)$. Autrement dit, tout élément d'une classe d'équivalence la détermine.*

Définition 1.8 (Partition d'un ensemble)**.** Soit A un ensemble. Une partition de A est un ensemble de parties de A, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(A)$, qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) aucune des parties n'est vide : $\forall Q \in \mathcal{Q}, Q \neq \varnothing$,

(ii) l'union des parties recouvre A : $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q = A$, et

(iii) les parties sont deux à deux disjointes : $\forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}, \quad Q_1 \neq Q_2 \implies Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$.

Proposition 1.9 (Partition des classes d'équivalence)**.** *Soit A un ensemble.*

1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors l'ensemble des classes d'équivalence $A/\mathcal{R}$ forme une partition de A (on peut toujours construire une partition à partir d'une relation d'équivalence).*
2. *Soit $\mathcal{Q}$ une partition. Alors il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$ telle que $A/\mathcal{R}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$ (on peut toujours construire une relation d'équivalence à partir d'une partition).*

1.2 Applications

Définition 1.10 (Application)**.** Soit A, B deux ensembles. Une relation f entre A et B est une application (ou fonction [1]) si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in A, \quad \exists! b \in B, (a, b) \in f.$$

Autrement dit, une relation est une application si chaque élément de A est en relation avec un unique élément de B. On note alors l'application $f\colon A \to B$ plutôt que $f \subset A \times B$ et on utilise $f(a) = b$ (ou $f : a \mapsto b$) plutôt que afb.

Notation 1.11 (Vocabulaire des applications)**.**

- *Si* $f(a) = b$*, on dit que* b *est l'image de* a *par* f*, et que* a *est un antécédent (ou une préimage) de* b*.*
- *L'ensemble* A *est appelé le domaine de* f*, l'ensemble* B *est son co-domaine.*
- *Pour tout* $C \subset A$*, l'image de* C *par* f *est le sous-ensemble de* B *défini par :*

  $$f(C) \coloneqq \{f(c), c \in C\} = \{b \in B \mid \exists c \in C, f(c) = b\} \subset B.$$

  L'ensemble $f(A)$ *est appelé image de* f*. Il est parfois noté* $\mathrm{Im}(f)$*.*
- *Pour tout* $D \subset B$*, l'image réciproque de* D *par* f *est le sous-ensemble de* A *définie par :*

  $$f^{-1}(D) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subset A.$$

Définition 1.12 (Composition d'applications)**.** Soit A, B, C des ensembles et $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ deux applications. La composée de f par g est l'application $g \circ f\colon A \to C$ définie par $\forall x \in A, \quad g \circ f(x) \coloneqq g(f(x))$.

Attention 1.13. Attention au sens de la composition ! $f \circ g$ n'est pas toujours bien définie !

Définition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)**.** Soit A, B deux ensembles et $f\colon A \to B$ une application.

Injectivité. f est dite *injective* si elle vérifie : $\forall x, x' \in A, (f(x) = f(x')) \implies x = x'$. Autrement dit, f est injective, si tous les éléments de A admettent une image distincte, ou encore si tout élément de B admet au plus un antécédent par f.

Surjectivité. f est dite *surjective* si elle vérifie : $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective, si tout élément de B admet au moins un antécédent par f.

Bijectivité. f est dite *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de B admet exactement un antécédent par f. Autrement dit f est bijective si elle vérifie : $\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y$.

Définition 1.15 (Application réciproque)**.** Soit $f\colon A \to B$ une bijection. L'application réciproque de f, notée $f^{-1}\colon B \to A$ est l'application qui à tout élément de $y \in B$ associe l'unique antécédent $x \in f^{-1}(\{y\})$:

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad f^{-1}(y) = x \quad :\iff \quad f(x) = y.$$

1. Certains auteurs définissent les fonctions de manière plus générale. Nous ne le ferons pas et utiliserons sans distinction ces deux termes.

Définition 1.16 (Application identité)**.** Soit A un ensemble. L'application identité sur A est la fonction $\mathrm{Id}_A \colon A \to A, x \mapsto x$.

Théorème 1.17. *Soit $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$.*

Composée de deux injections. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*

Composée de deux surjections. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*

Composée de deux injections. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Composition d'applications réciproques. *Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.*

Caractérisation des fonctions bijectives. *f est bijective si et seulement si il existe $h \colon B \to A$ tel que $h \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ h = \mathrm{Id}_B$. Dans ce cas, h est l'application réciproque de f : $f^{-1} = h$.*