

TD 1 : Logique propositionnelle

Jules Baudrin
jules.baudrin@uvsq.fr

12 septembre 2025

Dans tout le semestre, **toute réponse devra être justifiée**. Une moitié de réponse bien justifiée sera toujours mieux notée qu'une réponse juste, non ou mal justifiée.

1 Tables de vérités

Rappel : Deux propositions sont équivalentes si elles ont mêmes valeurs de vérités.

Exercice 1 (Associativité de la disjonction). Soit P, Q, R des propositions. À l'aide de tables de vérité, montrer l'équivalence suivante :

$$P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R.$$

Exercice 2 (Distributivité de la conjonction sur la disjonction). Soit P, Q, R des propositions. À l'aide de tables de vérité, montrer l'équivalence suivante :

$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

2 Règles de calculs

Exercice 3 (Définition alternative de l'implication). Soit P, Q des propositions. Par une preuve directe, montrer l'équivalence suivante :

$$P \rightarrow Q \iff (\neg P) \vee Q.$$

NB : À connaître par coeur ! Très pratique pour certains des exercices suivants...

Exercice 4.

- a. Soit P une proposition vraie et Q une proposition fausse. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?
 - i. $P \vee Q$
 - ii. $P \wedge Q$
 - iii. $(\neg P) \vee Q$
 - iv. $\neg(P \wedge Q)$
- b. Soit P une proposition fausse, Q une proposition vraie et R une proposition fausse. Quelles sont les propositions vraies ?
 - i. $Q \wedge (P \vee R)$
 - ii. $P \vee (Q \wedge R)$
 - iii. $\neg(P \wedge Q \wedge R)$
 - iv. $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$

Exercice 5. Soit P, Q, R des propositions. Sans utiliser les tables de vérité, montrer les équivalences suivantes.

- a. $(\text{Faux} \rightarrow Q) \iff \text{Vrai}$. NB : Du faux, on peut donc déduire n'importe quoi.
- b. $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow R \iff (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$.
- c. $P \iff P \wedge (Q \vee (Q \rightarrow P))$.

Exercice 6 (Négations et simplifications). Écrire la négation des propositions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions et simplifier les expressions obtenues.

- a. $P \rightarrow Q$,
- b. $P \wedge \neg Q$,
- c. $P \wedge (Q \wedge R)$,
- d. $P \wedge (Q \vee R)$,
- e. $P \vee (Q \wedge R)$,
- f. $(P \wedge Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$.

Exercice 7 (Simplifications et valeurs de vérités). Soit P et Q deux propositions. Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

- a. $P \wedge (\neg P)$
- b. $(\neg P) \vee P$
- c. $(\neg Q) \vee P$
- d. $(P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)$
- e. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
- f. $(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
- g. $P \vee (P \rightarrow Q)$
- h. $(P \leftrightarrow Q) \vee ((\neg P) \leftrightarrow (\neg Q))$
- i. $(P \vee Q) \rightarrow ((\neg P) \wedge Q)$

Exercice 8 (Ou exclusif). Soit P, Q des propositions. Le «ou exclusif» («exclusive or», souvent abrégé «XOR») de P et Q , noté $P \oplus Q$, est la proposition vraie lorsque l'une de P et Q est vraie, et l'autre est fausse.

- a. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$.
- b. Quelles sont les propositions vraies ?
 - i. Si $P \vee Q$ est vraie alors $P \oplus Q$ aussi.
 - ii. Si $P \vee Q$ est fausse alors $P \oplus Q$ aussi.
 - iii. $P \oplus Q$ est équivalent à $(P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$.
 - iv. $P \oplus Q$ est équivalent à $(P \vee Q) \vee ((\neg P) \vee (\neg Q))$.

3 Raisonnements et reformulations

Exercice 9. Soit P, Q, R, S, T des propositions. On suppose que les propositions suivantes sont toutes vérifiées.

- a. P
- b. $(\neg Q) \wedge P \rightarrow \neg S$.
- c. $S \rightarrow (\neg P) \vee Q$.
- d. $P \rightarrow R \vee S$.
- e. $S \wedge Q \rightarrow \neg P$.
- f. $R \wedge \neg(S \vee Q) \rightarrow T$.
- g. $R \rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

Exercice 10 (Formule d'exportation). Soit P, Q, R des propositions.

- a. Par suite d'équivalences, montrer que :

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \iff P \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

- b. Trouver des énoncés mathématiques classiques (géométrie du collège, divisibilité) qui prennent la forme $(P \wedge Q) \rightarrow R$ et reformuler les sous forme exportée.

Exercice 11 (Équivalences circulaires). Soit P, Q, R des propositions.

- a. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{— } (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \wedge (Q \leftrightarrow R) \iff (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \\ & \text{— } (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \wedge (Q \leftrightarrow R) \iff (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P). \end{aligned}$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les propositions suivantes :

- P : « n est pair»
- Q : «L'écriture binaire de n , $n = \sum_{i=0}^s 2^i b_i$ vérifie $b_0 = 0$.»
- R : « n ou $n + 2$ est divisible par 4.»

Montrer que les propositions P, Q et R sont équivalentes.