TD 2 : Calcul des prédicats & raisonnement

1 Prédicats et quantificateurs

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^3 - x \geq 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad n^2 - 3 \geq 0$
5. $\exists x > 0 \quad \sqrt{x} = x$
6. $\exists x < 0 \quad \exp(x) < 0$
7. $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 17$
8. $\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 = -4$
9. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
10. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
12. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

Exercice 2 (Négation de quantificateurs)**.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger les propositions fausses.

1. La négation de «$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leq x$» est «$\exists x \leq 0 \quad \ln(x) \leq x$».
2. La négation de «$\exists x > 0 \quad \ln(x^2) \neq x$» est «$\forall x > 0 \quad \ln(x^2) = x$».
3. La négation de «$\forall x \geq 0 \quad \exp(x) \geq x$» est «$\exists x \geq 0 \quad \exp(x) \leq x$».
4. La négation de «$\exists x > 0 \quad \exp(x) > x$» est «$\forall x > 0 \quad \exp(x) < x$».
5. La négation de «$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \neq f(x)$» est «$\exists x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y = f(x)$».
6. La négation de «$\exists x > 0 \quad \forall y > 0 \quad f(x)y > 0$» est «$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad f(x)y \leq 0$».
7. La négation de «$\forall x, x' > 0 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$» est «$\exists x, x' > 0 \quad x = x'$ et $f(x) = f(x')$».
8. La négation de «$\forall x, x' > 0 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$» est «$\exists x, x' > 0 \quad x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$».

Exercice 3 (Traduction maths → français.)**.** Soit I un intervalle et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Traduire en français les propositions suivantes :
   (a) $\forall x, y \in I, f(x) \neq f(y)$.
   (b) $\exists x \in I, \exists y \in I, f(x) \neq f(y)$.
   (c) $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$.
   (d) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
   (e) $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.
2. (Écrire la négation de chacune des propositions précédentes.)

Exercice 4 (Traduction français $\to$ maths.)**.**

1. Traduire sous la forme d'une proposition mathématique les énoncés suivants :
   (a) Le carré de tout nombre réel est positif.
   (b) Pour tout entier naturel n , il existe un unique réel x tel que $exp(x)$ égale n.
   (c) Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1.
   (d) n divise m ;
   (e) Un entier relatif divisible par 8 est divisible par 2 ;
   (f) Il existe un nombre pair divisible par 3 ;
   (g) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si l'un des deux est positif ;
   (h) Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3 ;
   (i) un réel non nul admet un inverse ;
   (j) L'inverse de tout nombre est unique.
2. Écrire la négation de chacune des propositions.

Exercice 5. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Si non, est-ce que l'une implique l'autre ?

1. $\neg(\exists x, P(x)) \quad$ et $\quad \forall x, \neg P(x)$;
2. $\forall x, P(x) \vee Q(x) \quad$ et $\quad (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$.
3. $(\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)) \quad$ et $\quad \forall x, P(x) \wedge Q(x)$.
4. $\exists x, P(x) \wedge Q(x) \quad$ et $\quad (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$.
5. $\exists x, P(x) \vee Q(x) \quad$ et $\quad (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$.
6. $\exists x, \forall y, P(x, y) \quad$ et $\quad \forall y, \exists x, P(x, y)$.

Exercice 6. Soit f, g deux fonctions réelles.

1. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?
   (a) « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ et $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».
   (b) « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».
2. Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

2 Raisonnements

Exercice 7 (Affirmer et infirmer des propositions)**.** Prouver les énoncés suivants :

1. Pour tout entier naturel n, si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. La proposition suivante est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2n$.
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $c < 0$. Alors la proposition suivante est vérifiée :
$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c \leq 0.$$
4. Il n'existe pas de nombre réel x tel que $e^{2x} + 3e^x + 2 = 0$.

Exercice 8 (Preuve d'équivalence)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$$

Exercice 9 (Disjonction de cas)**.** Montrer les propositions suivantes.

1. Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $n+m$ soit impair et nm soit pair.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-1| \leq x^2 - x + 1.$

Exercice 10 (Contraposée)**.** Montrer les assertions suivantes en procédant par contraposée.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 2 \implies (x > 1 \text{ ou } y > 1).$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq y + \varepsilon) \implies x \leq y.$
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ Montrer que si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$.

Exercice 11 (Au moins un élément supérieur à la moyenne)**.** Soit $n \leq 1$ un entier naturel et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Soit $M \in \mathbb{R}$. On considère l'énoncé suivant : « Si la moyenne des entiers x_j est supérieur à M, alors il existe un entier x_i supérieur à M.»

1. Écrire l'énoncé à l'aide de quantificateur.
2. Prouver l'énoncé par contraposée.
3. En déduire qu'au moins un des x_i est supérieur à la moyenne.

Exercice 12 (Par l'absurde)**.** Montrer les propositions suivantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
2. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
3. L'équation $x^3 + x = 0$ n'admet pas de solution rationnelle non nulle.
4. (Théorème d'Euclide sur les nombres premiers). Il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 13 (Principe des tiroirs)**.**

1. Montrer l'énoncé suivant : « Si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes. »
2. Sachant qu'un être humain a environ 150 000 cheveux, montrez qu'à Paris il y a deux personnes qui ont le même nombre de cheveux.

Exercice 14. Soit $n \geq 1$ et $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans l'intervalle $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer la propriété suivante : « Il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$ ».

1. Écrire la proposition à l'aide de quantificateurs, ainsi que sa négation.
2. Prouver par l'absurde la propriété.
3. Donner une preuve fondée sur le principe des tiroirs.

Exercice 15 (Division euclidienne)**.** L'objectif est de montrer le théorème de la division euclidienne :
« Étant donnés deux entiers naturels a, b, avec b non nul, il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. »

1. (Réécriture) Réécrire l'énoncé précédant à l'aide de quantificateurs.
2. (Preuve d'existence). En distinguant les cas $a < b$ et $a \geq b$ prouver l'existence d'un tel couple (q, r). (Pour le cas $a \geq b$, on pourra considérer l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, k = a - mb\}$ et utiliser l'axiome du plus petit élément vu en cours)
3. (Preuve d'unicité) Montrer qu'un tel couple (q, r) est unique.

Exercice 16 (Solutions d'une équation avec une racine)**.** On souhaite déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante d'inconnue x :

$$\sqrt{2 - x} = x.$$

1. En supposant qu'il existe une solution x, prouver que l'équation admet au plus deux solutions.
2. Montrer que l'équation admet exactement une solution.

2.1 Par récurrence

Exercice 17 (Suites définies par récurrence)**.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 - 6(\frac{1}{2})^n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 5$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-2)^{n+1}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5u_n + 2$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{4}(5^n - 1)$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n$.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n(n - 1)$.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq n$.

Exercice 18. Montrer par récurrence les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.
2. $\forall n \geq 8, \ \exists a, b \in \mathbb{N}, \quad n = 3a + 5b$.
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
5. Pour tout entier $n \leq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ (en commençant par reformuler cet énoncé sans points de suspension).

Exercice 19 (Récurrence et somme)**.** Montrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Exercice 20 (Suite de Fibonacci)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (dite de Fibonacci) définie récursivement comme suit :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et } \forall n \leq 2, u_n \coloneqq u_{n-1} + u_{n-2}.$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie récursivement comme suit :

   $$v_0 = 1, v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} \coloneqq v_n + v_{n+1}.$$

   Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.
2. Montrer la proposition suivante :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$