

TD 3 - Théorie des ensembles

Exercice 1 (Opérateurs). Soit un univers $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7\}, \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$\bar{A}, A \cup C, \overline{A \cup C}, A \cap C, \overline{A \cap C}, (A \cap B) \cup (C \cup D), (A \cup C) \cap (B \cup D), A \setminus D \text{ et } D \setminus A.$$

Exercice 2 (Représentation informatique des ensembles). Soit $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un ensemble fini. On souhaite étudier informatiquement les sous-ensembles de U .

- a. Soit A un sous-ensemble de U . Quel mot binaire sur n bits $m_A \in \{0, 1\}^n$ peut-on associer à A pour le représenter ? Donner un exemple avec les ensembles de l'exercice 1.
- b. Soit A, B deux sous-ensembles de U . Comment calculer $m_{\bar{A}}, m_{A \cup B}, m_{A \cap B}$ à partir des mots m_A et m_B . Donner des exemples avec les ensembles de l'exercice 1.

Exercice 3 (Diagrammes de Venn). **a.** On suppose que $A \cup B = B \cap C$ et que $C \subset D$. Dessiner les diagrammes de Venn de A, B, C et D .

- b. Dessiner et comparer les diagrammes de Venn de $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.
- c. Dessiner et comparer les diagrammes de Venn de $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 4 (Sous-ensembles et ensemble vide).

- a. Lister les éléments de $\mathcal{P}(\emptyset)$.
- b. Lister les éléments de $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$.
- c. Lister les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

Exercice 5 (L'ordre dépend (presque toujours) dans le produit cartésien). Soit A, B deux ensembles. Montrer que $A \times B = B \times A$ si et seulement si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

Exercice 6 (Propriétés). Soient A, B et C dans un univers U .

- a. Démontrer les propriétés suivantes par double inclusion.
 - i. La distributivité de \cap par rapport \cup : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - ii. La distributivité de \cup par rapport \cap : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- b. Démontrer les propriétés suivantes à l'aide d'une succession d'égalité.
 - i. Les lois de de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
 - ii. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$
 - iii. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
 - iv. $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

Exercice 7 (Paradoxe de Russell). **a. Paradoxe du barbier.** Sur l'enseigne du barbier du village on peut lire : "Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là." Le barbier se rase-t-il lui même ?

- b. **Énoncé général.** Soit E l'ensemble formé de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes :

$$E = \{F \mid F \text{ est un ensemble et } F \notin F\}.$$

L'ensemble E appartient-il à lui-même ?

NB : Afin d'éviter l'existence de ces ensembles paradoxaux, on ne définit pas d'ensemble de la forme $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$, mais on restreint les x à appartenir à un certain ensemble : $\{x \in X \mid \mathcal{P}(x)\}$.

1 Dénombrement et combinatoire

Exercice 8 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$). On souhaite compter le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

- On considère $E_0 = \emptyset, E_1 = \{a\}, E_2 = \{a, b\}, E_3 = \{a, b, c\}$. Combien de sous-ensembles admettent chacun des ensembles E_0, E_1, E_2, E_3 ?
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble E , si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
Formule à connaître par cœur.
- Quel est le rapport entre cette formule et l'Exercice 2 ?
- Prouver que $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
Formule à connaître par cœur.

Exercice 9 (Cardinalité des unions et intersections.). Soit A, B deux ensembles finis.

- Dans cette question uniquement, on suppose que A et B sont disjoints. Montrer que $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Montrer que $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
- Montrer que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et que $A \setminus B, B \setminus A$ et $A \cap B$ sont deux à deux disjoints.
- En déduire que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
Formule à connaître par cœur.
- En déduire également $|A \setminus B| = |A \cup B| - |B|$.

Exercice 10 (Propriétés des coefficients binomiaux). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k tel que $0 \leq k \leq n$. Sans utiliser l'expression factorielle (qui est l'objet de la dernière question), prouver les formules suivantes.

- Symétrie.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
Formule à connaître par cœur.
- Formule de Pascal.** $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
Formule à connaître par cœur.
- Formule du capitaine.** Si k est non nul, alors $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.
- Expression factorielle.** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Formule à connaître par cœur.

Exercice 11. a. Un chanteur a 20 chansons dans son répertoire. Il veut faire une série de concerts de 12 chansons toutes différentes. Combien peut-il faire de concerts différents sachant que deux concerts sont différents s'ils ont au moins une chanson différente.

- Considérons une classe de n étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du semestre les étudiants réalisent que chaque paire d'étudiants est restée exactement une fois. Combien y a-t-il eu de cours ? Pour quelles valeurs de n est-ce possible ?
- Quel est le nombre d'anagrammes du mot "équation" ? du mot "théorème" ? (On ne différenciera pas les lettres accentuées).