

TD 4 - Relations

Propriétés des relations

Exercice 1 (Relation et relation réciproque). Soit $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ deux ensembles.

- a. Décrire les relations suivantes entre A et B sous forme d'ensemble.
 - i. « est inférieur strictement à »,
 - ii. « est inférieur ou égal à »,
 - iii. « divise ».
- b. Pour chacune des relations, décrire les relations réciproques en français et langage ensembliste.

Exercice 2 (Relations et ensembles). Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour tout élément x de A (resp. y de B) on note $m(x)$ (resp. $m(y)$) le nombre de fois où x (resp. y) apparaît en première (resp. seconde) coordonnée d'un couple de la relation \mathcal{R} .

- a. Donner un exemple de relation ayant au moins un élément $x \in A$ tel que $m(x) \geq 2$.
- b. Parmi toutes les relations possibles entre A et B , on considère une relation \mathcal{R} qui a le plus de couples possibles. Que vaut alors $|\mathcal{R}|$? Donner pour tout $x \in A$ et $y \in B$ les valeurs de $m(x)$ et $m(y)$.
- c. Parmi toutes les relations possibles entre A et B , on considère une relation \mathcal{R} qui a le moins de couples possibles. Que vaut alors $|\mathcal{R}|$? Donner pour tout $x \in A$ et $y \in B$ les valeurs de $m(x)$ et $m(y)$.
- d. Combien y a-t-il de relations différentes entre A et B ?

Exercice 3 (Don du sang). Considérons la relation de compatibilité des groupes sanguins pour laquelle $x\mathcal{R}y$ signifie qu'une personne de groupe sanguin x peut donner son sang à une personne de groupe sanguin y . Décrire la relation. Est-elle réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique?

Exercice 4 (Exemples et contre-exemples). Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, transitives?

- a. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x - y| \leq 1\}$.
- b. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq y\}$.
- c. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2, xy \neq 0\}$.
- d. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x + y \text{ est pair}\}$.

Relations d'ordre

Exercice 5 (Ordre ou pas ordre). Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre?

- a. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \leq y$.
- b. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x < y$.
- c. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y$ si et seulement si x est multiple de y .
- d. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y$ ssi l'écriture de x est contenue dans l'écriture de y (exemple : $101 \mathcal{R} 31012$).
- e. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.

Exercice 6 (Ordre strict et ordre). Soit A un ensemble.

- Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur A . Construire un ordre strict \mathcal{R}' sur A à partir de \mathcal{R} .
- Soit \mathcal{R} un ordre strict sur A . Construire une relation d'ordre \mathcal{R}' sur A à partir de \mathcal{R} .
- Pourquoi peut-on dire que ces deux transformations (ordre \rightarrow ordre strict et ordre strict \rightarrow ordre) sont inverses l'une de l'autre ?

1 Relation d'équivalence

Exercice 7 (Représentant d'une classe d'équivalence). Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur A . Soit $x, y \in A$. Montrer que $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$ si et seulement si $y \in \mathcal{C}(x)$.

Exercice 8 (Partition et relation d'équivalence). Soit A un ensemble. Une *partition* \mathcal{Q} de A , est un ensemble de parties de A , $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(A)$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- aucune des parties n'est vide : $\forall Q \in \mathcal{Q}, Q \neq \emptyset$,
- l'union des parties recouvre A : $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q = A$, et
- les parties sont deux à deux disjointes :

$$\forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}, Q_1 \neq Q_2 \implies Q_1 \cap Q_2 = \emptyset.$$

- Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur A . Montrer que A/\mathcal{R} forme une partition de A . (On pourra utiliser l'exercice précédent pour la preuve de **(iii)**).
- Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(A)$ une partition de A . Définir à partir de \mathcal{Q} une relation d'équivalence \mathcal{R} sur A telle que $A/\mathcal{R} = \mathcal{Q}$.
- Pourquoi peut-on dire que ces deux transformations (relation d'eq. \rightarrow partition et partition \rightarrow relation d'eq.) sont inverses l'une de l'autre ?

Exercice 9 (Congruence modulo n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la relation \mathcal{R} sur \mathbb{Z} définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est un multiple de } n.$$

- Montrer que cette relation (appelée relation de congruence modulo n) est une relation d'équivalence.
- Lister et décrire les classes d'équivalence modulo 5.
- De manière générale décrire les classes d'équivalence modulo n .

Exercice 10. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation $\mathcal{R} : (p, q)\mathcal{R}(p', q')$ si et seulement si $p - p'$ est pair et $q - q'$ est divisible par 3.

- De quel ensemble \mathcal{R} est-il un sous-ensemble ?
- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- Déterminer le cardinal des classes $\mathcal{C}((1, 1)), \mathcal{C}((1, 2)), \mathcal{C}((1, 3))$.
- Soit $q \in E$. Montrer que si $(x, y) \in \mathcal{C}((1, q))$, alors $(x + 1, y) \in \mathcal{C}((2, q))$.
- Lister les différentes classes d'équivalence pour \mathcal{R} , c'est-à-dire les éléments de $(E \times E)/\mathcal{R}$.
- Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Le résultat est-il compatible avec le cardinal de $E \times E$?