

## TD 5 - Applications

**Exercice 1** (Exemples et contre-exemples). Pour chacun des cas suivants, déterminer des ensembles  $A$  et  $B$  et une application  $f: A \rightarrow B$  tels que :

- $f$  est non injective et non surjective ;
- $f$  est non injective et surjective ;
- $f$  est injective et non surjective ;
- $f$  est injective et surjective.

**Exercice 2** (Injection - Surjection). Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . (Rappeler les définitions de  $\lfloor n \rfloor$  et  $\lceil n \rceil$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .)
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f(n) = 2n$ .
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $f(n) = x + 1$ .
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $f(n) = x + 1$ .

**Exercice 3** (Fonctions et sous-ensembles). Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f: E \rightarrow F$ . Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Soit  $C$  et  $D$  deux sous-ensembles de  $F$ .

Les propositions ci-dessous sont-elle vraies (faire une preuve) ou fausses (donner un contre-exemple) ?

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(f(A)) = A$
- $f(f^{-1}(C)) = C$

**Exercice 4** (Propriétés de la composition). Soit  $A, B, C$  des ensembles et  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow C$  des applications. Montrer les propositions suivantes.

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
- Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
- Si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$  et  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ .
- $f$  est bijective si et seulement si il existe  $h: B \rightarrow A$  tel que  $h \circ f = \text{Id}_A$  et  $f \circ h = \text{Id}_B$ .  
De plus,  $f^{-1} = h$ .

**Exercice 5** (Applications et combinatoire). Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis. Soit  $f : A \rightarrow B$  une application. Montrer que :

- Si  $f$  est injective, alors  $|A| \leq |B|$ .
- En déduire une preuve du principe des tiroirs : “Si on range  $n$  objets dans  $t$  tiroirs et si  $n > t$ , alors au moins un tiroir contient deux objets ou plus”.
- Si  $f$  est surjective, alors  $|A| \geq |B|$ .
- Que peut-on en déduire si  $f$  est bijective ?
- Supposons que  $|A| = |B|$ . Montrer que :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective} .$$

**Exercice 6** (Applications et dénombrement). Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

- Combien existe-t-il d'applications entre  $A$  et  $B$  ?
- Combien existe-t-il d'applications bijectives entre  $A$  et  $B$  ?
- Combien existe-t-il d'applications injectives entre  $A$  et  $B$  ?

**Exercice 7** (Propriétés de l'exponentielle et du logarithme). Rappel : La fonction exponentielle  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est la fonction continue définie par :

$$\exp(1) = e \approx 2,718 \quad \text{et} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \exp(x + x') = \exp(x) \exp(x'). \quad (\star)$$

Elle est bijective et sa réciproque (appelée logarithme népérien) est notée  $\ln$ .

- Quel est le domaine de définition de  $\ln$  ? Quel est son co-domaine ? Quelle est son image ?
- En utilisant *uniquement* les propriétés  $(\star)$ , montrer les propositions suivantes.
  - $\exp(0) = 1$  et  $\ln(1) = 0$ . (On pourra utiliser le fait que  $1 - 1 = 0 = 2 - 2$ )
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \neq 0$  et  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .
  - (Facultative) En utilisant la continuité, montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ .

**Exercice 8** (Exponentielle et logarithme en base  $a$ ). Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction exponentielle en base  $a$  est la fonction  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \exp(x \ln(a))$ . On note plus usuellement  $a^x := \exp(x \ln(a))$ .

- Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*, x, y \in \mathbb{R}$ . En utilisant l'Exercice 7, montrer les propriétés suivantes.
  - La fonction exponentielle en base  $e$ ,  $\exp_e$  est égale à la fonction exponentielle  $\exp$ .
  - La fonction  $\exp_a$  est bijective et sa bijection réciproque, notée  $\log_a$ , vérifie :
 
$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} .$$
  - $a^x a^y = a^{x+y}$
  - $(a^x)^y = a^{xy}$
  - $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- Soit  $a, x, y \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}$ . Montrer les propriétés suivantes du logarithme :
  - $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
  - $\log_a x^n = n \log_a x$
  - $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
  - $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
  - $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$