TD 8 - Algébre linéaire

Exercice 1 (Quelques régles de calculs)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a. Rappeler la définition d'un espace vectoriel.

b. Montrer la proposition suivante : $\forall x \in E, \quad (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$.

c. Montrer la proposition suivante : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot x = 0_E \iff x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

Exercice 2 (Quelques constructions d'espaces vectoriels)**.** Soit E un ensemble et F, G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que :

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b. L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des fonctions de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

c. Le produit $F \times G$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 3 (Quelques propriétés des applications linéaires)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

a. Donner des exemples simples de fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$? de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$?

b. Montrer que si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$. La réciproque est-elle vraie ?

c. Montrer que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire. La réciproque est-elle vraie ?

d. Montrer que si $f : E \to F$ est linéaire bijective, alors f^{-1} est linéaire bijective. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 (Familles libres, génératrices et bases)**.**

a. Les familles suivantes sont elles libres ? génératrices ? des bases ?

i. $\{(1, 2, 0), (2, 0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^3$? dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$?

ii. $\{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (12, 4, 5)\}$ dans $\mathbb{R}^3$? dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$?

iii. $\{(-1, -1, 1), (2, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$? dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$?

iv. $\{(-1, -1, 1), (2, 0, 0), (4, 4, 1), (2, 4, 9)\}$ dans $\mathbb{R}^3$? dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$?

b. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendrés par ces familles de vecteurs ?

Exercice 5 (Matrice et applications linéaires)**.** On considère les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Donner les fonctions linéaires f_A, f_B, f_C associées aux matrices A, B, C en précisant le domaine et le co-domaine.

b. Donner les matrices associées aux fonctions $f_A + f_B$ et $f_A \circ f_C$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 6. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

a. Ces matrices sont-elles inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$?

b. Pour chacune des matrices ci-dessus, si la matrice est inversible, calculer :

- **i.** L'inverse de la matrice
- **ii.** La fonction linéaire associée à la matrice.
- **iii.** Cette fonction est-elle bijective ? Qu'observe-t-on ?