

TD 1 – Logique propositionnelle

Prérequis

- ☐ Connaître les définitions de *proposition* et *connecteur logique*.
- ☐ Connaître les tables des valeurs du ET, OU et NON logiques.
- ☐ Revoir les définitions d'*implication* et d'*équivalence* logique.
- ☐ Faire la différence entre les symboles $\rightarrow$ et $\implies$.

Objectifs

- ☐ Maîtriser les règles de calcul propositionnel.
- ☐ Savoir montrer une équivalence logique par équivalences successives en justifiant chaque étape.

Durant tout le semestre, **toute réponse devra être justifiée**, en TD, en CC, comme à l'examen. Une moitié de réponse bien justifiée sera toujours mieux notée qu'une réponse juste, non ou mal justifiée.

1 Avant le TD

Ces exercices ne seront pas traités en TD. Ils sont là pour vérifier la compréhension du cours. Si vous n'y arrivez pas, **pas de panique** : posez des questions à votre chargé.e de TD et soyez attentifs aux exercices traités pendant les séances.

Échauffement 1. Soit P une proposition vraie et Q une proposition fausse. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1. $P \vee Q$ 2. $P \wedge Q$ 3. $(\neg P) \vee Q$ 4. $\neg(P \wedge Q)$

Échauffement 2. Soit P une proposition. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1. $P \wedge (\neg P)$ 2. $(\neg P) \vee P$

Quels noms donne-t-on à ces propriétés ?

Échauffement 3 (Tables de vérité). Soit P, Q, R des propositions. À l'aide de tables de vérité, montrer les équivalences suivantes :

1. Associativité de la disjonction. $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$.
2. Distributivité de la conjonction sur la disjonction. $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

2 Règles de calculs

Exercice 1 (Mise en jambes).

1. Soit P une proposition fausse, Q une proposition vraie et R une proposition fausse. Quelles sont les propositions vraies ?

a. $Q \wedge (P \vee R)$ b. $P \vee (Q \wedge R)$ c. $\neg(P \wedge Q \wedge R)$ d. $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$

2. Soit P, Q des propositions. Par une preuve directe, montrer l'équivalence suivante :

$$P \rightarrow Q \iff (\neg P) \vee Q.$$

NB : À connaître par coeur ! Très pratique pour certains des exercices suivants.

Exercice 2. Soit P, Q des propositions.

1. On souhaite prouver l'équivalence suivante : $\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \iff (\neg Q \wedge \neg P)$. Justifier dans le tableau ci-dessous chacune des étapes de la preuve proposée.

	Calcul	Propriété utilisée / justification courte
$\neg(P \vee (\neg P \wedge Q))$	$\iff (\neg P) \wedge \neg(\neg P \wedge Q)$	
	$\iff (\neg P) \wedge (\neg(\neg P) \vee \neg Q)$	
	$\iff (\neg P) \wedge (P \vee \neg Q)$	
	$\iff (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
	$\iff \text{Faux} \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
	$\iff \neg P \wedge \neg Q$	
	$\iff \neg Q \wedge \neg P$	

2. Par équivalences successives, prouver l'équivalence suivante : $[(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)] \iff \text{Vrai}$. Justifier *précisément* chaque étape. (Il n'y a pas forcément besoin de 10 étapes...)

	Calcul	Propriété utilisée / justification courte
$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	
	$\iff$	

Exercice 3. Soit P, Q, R des propositions. Sans utiliser les tables de vérité, montrer les équivalences suivantes.

1. $(\text{Faux} \rightarrow Q) \iff \text{Vrai}.$ *NB : Du faux, on peut donc déduire n'importe quoi.*
2. $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow R \iff (\neg P \wedge \neg Q) \vee R.$
3. $P \iff P \wedge (Q \vee (Q \rightarrow P)).$

Exercice 4 (Négations et simplifications). Écrire la négation des propositions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions et simplifier les expressions obtenues.

1. $P \rightarrow Q,$
2. $P \vee (Q \wedge R),$
3. $(P \wedge Q) \rightarrow (R \rightarrow S).$

Exercice 5 (Simplifications et valeurs de vérités). Soit P et Q deux propositions. Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

1. $(\neg Q) \vee P$
2. $(P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)$
3. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
4. $(P \leftrightarrow Q) \vee ((\neg P) \leftrightarrow (\neg Q))$

Exercice 6 (Ou exclusif). Soit P, Q des propositions. Le «ou exclusif» («exclusive or», souvent abrégé «XOR») de P et Q , noté $P \oplus Q$, est la proposition vraie lorsque l'une de P et Q est vraie, et l'autre est fausse.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$.
2. Quelles sont les propositions vraies ?
 - a. Si $P \vee Q$ est vraie alors $P \oplus Q$ aussi.
 - b. Si $P \vee Q$ est fausse alors $P \oplus Q$ aussi.
 - c. $P \oplus Q$ est équivalent à $(P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$.
 - d. $P \oplus Q$ est équivalent à $(P \vee Q) \vee ((\neg P) \vee (\neg Q))$.

3 Raisonnements et reformulations

Exercice 7. Soit P, Q, R, S, T des propositions. On suppose que les propositions suivantes sont toutes vérifiées. La proposition T est-elle vraie ?

1. P
2. $(\neg Q) \wedge P \rightarrow \neg S.$
3. $S \rightarrow (\neg P) \vee Q.$
4. $P \rightarrow R \vee S.$
5. $S \wedge Q \rightarrow \neg P.$
6. $R \wedge \neg(S \vee Q) \rightarrow T.$
7. $R \rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$

Exercice 8 (Formule d'exportation). Soit P, Q, R des propositions.

1. Par suite d'équivalences, montrer que :

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \iff P \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

2. Trouver des énoncés mathématiques classiques (géométrie du collège, divisibilité) qui prennent la forme $(P \wedge Q) \rightarrow R$ et reformuler les sous forme exportée.

4 Après le TD

De même que les exercices d'échauffement, ces exercices ne seront pas traités en TD. Ils sont proposés à titre d'entraînement/révisions.

Exercice 9. Écrire la négation des propositions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions et simplifier les expressions obtenues.

1. $P \wedge (Q \wedge R)$.
2. $P \wedge (Q \vee R)$.

Exercice 10. Soit P et Q deux propositions. Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

1. $P \vee (P \rightarrow Q)$.
2. $(P \vee Q) \rightarrow ((\neg P) \wedge Q)$.
3. $(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

Exercice 11 (Équivalences circulaires). Soit P, Q, R des propositions.

1. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{— } (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \wedge (Q \leftrightarrow R) \iff (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \\ & \text{— } (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \wedge (Q \leftrightarrow R) \iff (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P). \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les propositions suivantes :

- P : « n est pair»
- Q : «L'écriture binaire de n , $n = \sum_{i=0}^s 2^i b_i$ vérifie $b_0 = 0$.»
- R : « n ou $n + 2$ est divisible par 4.»

Montrer que les propositions P, Q et R sont équivalentes.

Exercice 12. Soit P, Q, R des propositions.

1. On souhaite prouver l'équivalence suivante : $\neg(P \wedge (Q \vee R)) \iff [(Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow \neg P)]$. Justifier dans le tableau ci-dessous chacune des étapes de la preuve proposée.

Calcul	Propriété utilisée / justification courte
$\neg(P \wedge (Q \vee R)) \iff \neg P \vee \neg(Q \vee R)$	
$\iff \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$	
$\iff (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$	
$\iff (\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg R)$	
$\iff (Q \rightarrow \neg P) \wedge (P \rightarrow \neg R)$	
$\iff (Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow \neg P)$	

2. Par équivalences successives, prouver l'équivalence suivante : $\neg(P \vee \neg(P \wedge Q)) \iff \text{Faux}$. Justifier *précisément* chaque étape. (Il n'y a pas forcément besoin de 10 étapes...)

Calcul	Propriété utilisée / justification courte
$\neg(P \vee \neg(P \wedge Q)) \iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	
$\iff$	