

TD 3 - Théorie des ensembles**Prérequis**

- ☐ Connaître les définitions d'appartenance et inclusion et faire la différence entre les deux.
- ☐ Maîtriser les opérations élémentaires sur les ensembles : *union*, *intersection*, *complémentaire* et *différence* et leur définitions en termes de quantificateurs.
- ☐ Revoir les définitions de produit cartésien, d'ensembles des parties, d'arrangements et permutations.

Objectifs

- ☐ Savoir simplifier une égalités ensemblistes à l'aide des propriétés élémentaires.
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble est inclus (ou non) dans un autre ensemble.
- ☐ Savoir montrer une égalité d'ensembles par double inclusion.
- ☐ Maîtriser les quantités importantes en combinatoire : factorielle, coefficients binomiaux, arrangements, puissances de 2.
- ☐ Savoir modéliser une situation de dénombrement comme un tirage avec remise ou sans remise et se reposer sur la théorie des ensembles pour conclure.

Les résultats des questions notées ♥ sont à connaître par cœur.

1 Avant le TD

Échauffement 1 (Opérateurs). Soit un univers $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7\}, \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$\overline{A}, A \cup C, \overline{A \cup C}, A \cap C, \overline{A \cap C}, (A \cap B) \cup (C \cup D), (A \cup C) \cap (B \cup D), A \setminus D \text{ et } D \setminus A.$$

Échauffement 2 (Diagrammes de Venn). Soit A, B, C, D des sous-ensembles d'un ensemble univers U .

1. On suppose que $A \cup B = B \cap C$ et que $C \subset D$. Dessiner les diagrammes de Venn de A , B , C et D .
2. Dessiner et comparer les diagrammes de Venn de $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Dessiner et comparer les diagrammes de Venn de $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

2 Quelques propriétés remarquables des ensembles

Exercice 1 (Propriétés des ensembles). Soit A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble U .

1. Démontrer la propriété de distributivité de $\cap$ par rapport $\cup$ par double inclusion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2. Démontrer les propriétés suivantes à l'aide d'une succession d'égalités.

- a. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Loi de De Morgan)
- b. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- c. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Calcul	Propriété utilisée
$\overline{A \cup B} =$	
$=$	
$=$	
$= \overline{A} \cap \overline{B}$	

Exercice 2 (Éléments, sous-ensembles et ensemble vide). Lister les éléments des ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(\emptyset)$.
2. $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$.
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

Exercice 3 (Représentation informatique des ensembles). Soit $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un ensemble fini. On souhaite étudier informatiquement les sous-ensembles de U .

1. Soit A un sous-ensemble de U . Quel mot binaire m_A de longueur n peut-on associer à A pour le représenter ? Donner un exemple avec les ensembles de l'échauffement 1.
2. Écrire de manière ensembliste le fait que m_A est un « mot binaire de longueur n ».
3. Soit A, B deux sous-ensembles de U . Comment calculer $m_{\overline{A}}, m_{A \cup B}, m_{A \cap B}$ à partir des mots m_A et m_B . Donner des exemples avec les ensembles de l'échauffement 1.

Exercice 4 (Dans un produit cartésien, l'ordre dépend (presque toujours)). Soit A, B deux ensembles. Montrer la proposition suivante :

$$A \times B = B \times A \quad \text{si et seulement si} \quad A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset \text{ ou } A = B.$$

Exercice 5 (Paradoxe de Russell).

1. **Paradoxe du barbier.** Sur l'enseigne du barbier du village on peut lire : « Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. » Le barbier se rase-t-il lui-même ?
2. **Énoncé général.** Soit E l'ensemble formé de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes :

$$E = \{F \mid F \text{ est un ensemble et } F \notin F\}.$$

L'ensemble E appartient-il à lui-même ?

NB : Le « paradoxe » de Russel indique qu'un prédicat seul (ou une propriété) ne suffit pas à définir un ensemble : l'ensemble $E = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ peut mener à un paradoxe. Pour éviter cela, les axiomes de théories des ensembles ont été revus pour obliger à *restreindre* les éléments x à appartenir à un ensemble déjà existant : $E = \{x \in X \mid \mathcal{P}(x)\}$. On parle de *compréhension restreinte* ou du *schéma de séparation*.

3. Pourquoi la compréhension restreinte permet-elle de régler le problème soulevé par Russel ?

3 Dénombrement et combinatoire

Exercice 6 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$). On souhaite compter le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

1. On considère $E_0 = \emptyset, E_1 = \{a\}, E_2 = \{a, b\}, E_3 = \{a, b, c\}$. Combien de sous-ensembles admettent chacun des ensembles E_0, E_1, E_2, E_3 ?
2. ♥ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble E , si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
3. Quel est le rapport entre cette formule et l'Exercice 3 ?
4. ♥ Prouver que $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Exercice 7 (Cardinalité des unions et intersections.). Soit A, B deux ensembles finis.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que A et B sont disjoints. Montrer que $|A \cup B| = |A| + |B|$.
2. Montrer que $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
3. Montrer que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et que $A \setminus B, B \setminus A$ et $A \cap B$ sont deux à deux disjoints.
4. ♥ En déduire que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
5. En déduire également $|A \setminus B| = |A \cup B| - |B|$.

Exercice 8 (Propriétés des coefficients binomiaux). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k tel que $0 \leq k \leq n$. Sans utiliser l'expression factorielle (qui est l'objet de la dernière question), prouver les formules suivantes.

1. ♥ **Symétrie.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. ♥ **Formule de Pascal.** $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
3. **Formule du capitaine.** Si k est non nul, alors $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.
4. ♥ **Expression factorielle.** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercice 9. 1. Un chanteur a 20 chansons dans son répertoire. Il veut faire une série de concerts de 12 chansons toutes différentes. Combien peut-il faire de concerts différents sachant que deux concerts sont différents s'ils ont au moins une chanson différente.

2. Considérons une classe de n étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du semestre les étudiants réalisent que chaque paire d'étudiants est restée exactement une fois. Combien y a-t-il eu de cours ? Pour quelles valeurs de n est-ce possible ?
3. Quel est le nombre d'anagrammes du mot "équation" ? du mot "théorème" ? (On ne différenciera pas les lettres accentuées).

4 Après le TD

Exercice 10. Soit A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble U .

1. Démontrer la propriété distributivité de $\cup$ par rapport $\cap$ par double inclusion :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Démontrer l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ à l'aide d'une succession d'égalités et justifier chacune d'entre elles :
3. Démontrer l'équivalence suivante par suite d'équivalences et justifier :

$$A \cap B = A \cap C \quad \text{si et seulement si} \quad A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$