

TD 4 - Relations

Prérequis

- ☐ Connaître la définition ensembliste d'une *relation entre deux ensembles* et de la relation *réciproque*.
- ☐ Savoir illustrer une relation à l'aide d'un diagramme patate.
- ☐ Connaître les définitions de *réflexivité*, *symétrie*, *transitivité* et *antisymétrie*, de relation d'*ordre* et d'*équivalence*.
- ☐ Connaître le vocabulaire des relations d'équivalence (classe, ensemble quotient, partitions).

Objectifs

- ☐ Savoir manipuler la définition ensembliste d'une relation.
- ☐ Savoir montrer qu'une relation vérifie (ou ne vérifie pas) une propriété de réflexivité, symétrie, transitivité ou antisymétrie.
- ☐ Savoir identifier des relations d'ordre et d'équivalence.
- ☐ Savoir décrire la classe d'équivalence d'un élément.

1 Avant le TD

Échauffement 1 (Relation et relation réciproque). Soit $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ deux ensembles.

1. Décrire les relations suivantes entre A et B sous forme d'ensemble.
 - a. « est inférieur strictement à »,
 - b. « est inférieur ou égal à »,
2. Pour chacune des relations, décrire les relations réciproques en français et langage ensembliste.

Échauffement 2 (Don du sang). Soit $E = \{O, A, B, AB\}$ l'ensemble des groupes sanguins. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad x \text{ peut donner du sang à } y.$$

1. Décrire la relation en langage ensembliste.
2. Décrire la relation par un diagramme.
3. La relation est-elle réflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ?

2 Propriétés des relations

Exercice 1 (Mise en jambe). Soit $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ deux ensembles.

1. Décrire la relation « est un diviseur de » entre A et B sous forme d'ensemble.
2. Décrire la relation réciproque en français et en langage ensembliste.

Exercice 2 (Relations et ensembles). Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $\mathcal{R}$ une relation entre A et B . Pour tout élément x de A (resp. y de B) on note $m(x)$ (resp. $m(y)$) le nombre de fois où x (resp. y) apparaît en première (resp. seconde) coordonnée d'un couple de la relation $\mathcal{R}$.

1. Donner un exemple de relation ayant au moins un élément $x \in A$ tel que $m(x) \geq 2$.
2. Parmi toutes les relations possibles entre A et B , on considère une relation $\mathcal{R}$ qui a le plus de couples possibles. Que vaut alors $|\mathcal{R}|$? Donner pour tout $x \in A$ et $y \in B$ les valeurs de $m(x)$ et $m(y)$.
3. Combien y a-t-il de relations différentes entre A et B ?

3 Relations sur un ensemble

Exercice 3 (Exemples et contre-exemples). Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, transitives?

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x - y| \leq 1\}$.
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq y\}$.
3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2, xy \neq 0\}$.
4. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x + y \text{ est pair}\}$.

Exercice 4 (Ordre ou pas ordre). Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre?

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \leq y$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x < y$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y$ si et seulement si x est multiple de y .
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.

4 Relation d'équivalence

Exercice 5 (Représentant d'une classe d'équivalence). Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A . Soit $x, y \in A$. Montrer que $\bar{x} = \bar{y}$ si et seulement si $y \in \bar{x}$.

Exercice 6 (Partition et relation d'équivalence). Soit A un ensemble. Une *partition* $\mathcal{Q}$ de A , est un ensemble de parties de A , $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(A)$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) aucune des parties n'est vide : $\forall Q \in \mathcal{Q}, Q \neq \emptyset$,
- (ii) l'union des parties recouvre A : $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q = A$, et
- (iii) les parties sont deux à deux disjointes :

$$\forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}, Q_1 \neq Q_2 \implies Q_1 \cap Q_2 = \emptyset.$$

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A . Montrer que $A/\mathcal{R}$ forme une partition de A .
(On pourra utiliser l'exercice précédent pour la preuve de (iii)).
2. Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(A)$ une partition de A . Définir à partir de $\mathcal{Q}$ une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A telle que $A/\mathcal{R} = \mathcal{Q}$.
3. Pourquoi peut-on dire que ces deux transformations (relation d'eq. $\rightsquigarrow$ partition et partition $\rightsquigarrow$ relation d'eq.) sont « inverses » l'une de l'autre ?
4. Donner des exemples de partitions construites à partir de relations d'équivalence et inversement.

Exercice 7 (Congruence modulo n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \mathcal{R} y \iff x - y \text{ est un multiple de } n.$$

1. Montrer que cette relation (appelée relation de congruence modulo n) est une relation d'équivalence.
2. Lister et décrire les classes d'équivalence modulo 5.
3. De manière générale décrire les classes d'équivalence modulo n .

5 Après le TD

Exercice 8. On se place dans le même contexte que dans l'Exercice 2. Parmi toutes les relations possibles entre A et B , on considère une relation $\mathcal{R}$ qui a le moins de couples possibles. Que vaut alors $|\mathcal{R}|$? Donner pour tout $x \in A$ et $y \in B$ les valeurs de $m(x)$ et $m(y)$.

Exercice 9 (Relations et chaînes de caractères). Soit Σ un alphabet et Σ^* l'ensemble des chaînes de caractères dans cet alphabet. Par exemple si $\Sigma = \{a, b\}$ alors $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$, ε désigne simplement la chaîne de caractère vide. On considère des relations $\mathcal{R}$ sur Σ^* . Pour chacune d'entre elles montrer si la relation est transitive, symétrique, anti-symétrique, réflexive, total ou non.

1. $\forall x, y \in \Sigma^*, \quad x \mathcal{R} y, \stackrel{\text{def}}{\iff} x \text{ est une sous-chaîne de } y$ (exemple : $aba \mathcal{R} aabab$ mais $ab \not\mathcal{R} bbba$).
2. $\forall x, y \in \Sigma^*, \quad x \mathcal{R} y, \stackrel{\text{def}}{\iff} x \text{ est un préfixe de } y$ (exemple : $aba \mathcal{R} abaaabb$ mais $ab \not\mathcal{R} bbba$).
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, \quad x \mathcal{R} y, \stackrel{\text{def}}{\iff} x \text{ et } y \text{ ont le même nombre de } a$.

Exercice 10. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation $\mathcal{R} : (p, q) \mathcal{R} (p', q')$ si et seulement si $p - p'$ est pair et $q - q'$ est divisible par 3.

1. De quel ensemble $\mathcal{R}$ est-il un sous-ensemble ?
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Déterminer le cardinal des classes $\overline{(1, 1)}, \overline{(1, 2)}, \overline{(1, 3)}$.
4. Soit $q \in E$. Montrer que si $(x, y) \in \overline{(1, q)}$, alors $(x + 1, y) \in \overline{(2, q)}$.
5. Lister les différentes classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire les éléments de $(E \times E)/\mathcal{R}$.
6. Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Le résultat est-il compatible avec le cardinal de $E \times E$?