

TD 5 - Applications

Prérequis

- ☐ Connaître la définition d'une application en tant que *relation entre deux ensembles*.
- ☐ Maîtriser le vocabulaire des applications : image, préimage, domaine, co-domaine.
- ☐ Connaître les définitions mathématiques et en français des propriétés d'*injectivité*, *surjectivité* et *bijektivité*.

Objectifs

- ☐ Savoir prouver qu'une fonction est (ou non) injective, surjective ou bijective.
- ☐ Savoir utiliser ces propriétés pour prouver d'autres énoncés.
- ☐ Savoir faire la différence entre l'image réciproque d'un ensemble qui existe toujours et l'image réciproque d'un point qui n'existe pas toujours.

1 Avant le TD

Échauffement 1 (Exemples et contre-exemples). Soit A, B deux ensembles. Pour chacun des cas suivants, dessiner un diagramme représentant :

1. une application $f: A \rightarrow B$ non injective et non surjective ;
2. $f: A \rightarrow B$ non injective et surjective ;
3. $f: A \rightarrow B$ injective et non surjective ;
4. $f: A \rightarrow B$ injective et surjective.

Essayer de trouver des exemples explicites de applications pour chacun des cas ci-dessus en donnant de définitions claires de A, B et f .

Échauffement 2 (Exemples et contre-exemples). Soit E, F deux ensemble et $f: E \rightarrow F$ une application. On considère également des sous-ensembles A et B de E et des sous-ensembles C et D de F .

1. Dessiner la situation sous forme d'un diagramme représentant A, B, C, D, E, F et f .
2. À l'aide des définitions d'image et préimage pour un sous-ensemble, montrer les égalités suivantes.
 - a. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - b. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Pour vous entraînez, essayer de fournir pour l'un des deux une preuve par double-inclusion et pour l'autre une preuve par suite d'égalités.

2 Quelques propriétés des applications

Exercice 1 (Injection - Surjection). Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Rappeler les définitions de $\lfloor n \rfloor$ et $\lceil n \rceil$ pour $n \in \mathbb{Z}$.)
2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $f(n) = 2n$.
3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
4. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $f(n) = x + 1$.
5. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $f(n) = x + 1$.

Exercice 2 (Applications et sous-ensembles). Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Soit A et B deux sous-ensembles de E . Soit C et D deux sous-ensembles de F .

Les propositions ci-dessous sont-elles vraies (faire une preuve) ou fausses (donner un contre-exemple) ?

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
3. $f^{-1}(f(A)) = A$
4. $f(f^{-1}(C)) = C$

Exercice 3 (Propriétés de la composition). Soit A, B, C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. Montrer les propositions suivantes.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4. Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$.
5. f est bijective si et seulement si il existe $h : B \rightarrow A$ tel que $h \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ h = \text{Id}_B$.
De plus, $f^{-1} = h$.

Exercice 4 (Applications et combinatoire). Soit A et B deux ensembles finis. Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Montrer que :

1. Si f est injective, alors $|A| \leq |B|$.
2. En déduire une preuve du principe des tiroirs : "Si on range n objets dans t tiroirs et si $n > t$, alors au moins un tiroir contient deux objets ou plus".
3. Si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$.
4. Que peut-on en déduire si f est bijective ?
5. Supposons que $|A| = |B|$. Montrer que :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective} .$$

Exercice 5 (Exponentielle et logarithme). **Rappel.** La fonction exponentielle est une fonction continue $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\exp(1) = e \approx 2,718 > 0 \quad \text{et} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \exp(x + x') = \exp(x) \exp(x'). \quad (\star)$$

1. Montrer que $\exp(0) = 1$ puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.
2. En utilisant la continuité de $\exp$, montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.

On admet désormais que $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est appelée logarithme népérien et est notée $\ln$.

3. a. Quel est le domaine de définition de $\ln$? Quel est son co-domaine ? Quelle est son image ?
- b. Montrer que $\ln(1) = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle en base a est la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \exp(x \ln(a))$.

4. a. Montrer que la fonction $\exp_a$ est bien définie et que les fonctions $\exp_e$ et $\exp$ sont égales.
- b. Montrer que $\exp_a$ est bijective et que sa bijection réciproque, notée $\log_a$, vérifie :
 $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)}.$

3 Après le TD

Exercice 6 (Applications et dénombrement). Soit A et B deux ensembles finis.

1. Combien existe-t-il d'applications entre A et B ?
2. Combien existe-t-il d'applications bijectives entre A et B ?
3. Combien existe-t-il d'applications injectives entre A et B ?

Exercice 7 (Exponentielle et logarithme en base a). Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. L'exponentielle en base a , $\exp_a$ introduite à l'exercice 5 est plus usuellement notée avec la notation $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \ln(a))$. À l'aide uniquement des propriétés démontrées dans l'exercice 5, montrer les propriétés suivantes.

1. Propriétés de l'exponentielle. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a. } a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{b. } (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{c. } a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

2. Propriétés du logarithme. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \log_a xy = \log_a x + \log_a y & \text{b. } \log_a x^n = n \log_a x & \text{c. } \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x & \text{d. } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\ \text{e. } \log_a x = (\log_a b)(\log_b x) & & & \end{array}$$