

Master 1 Informatique – Compléments de maths CC 1 – preuve par récurrence

| | | |
|------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NOM: _____ | Prénom: _____ | Num. Étu.: <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text" value="2"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
|------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Réponse.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n) : u_n = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Initialisation. On observe que $6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 6 - 6 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vérifiée. Prouvons que $P(n+1)$ l'est aussi. On observe que :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2} \left(6 - 6 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) + 3 = 3 - 6 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 3 = 6 - 6 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1},$$

où l'on a utilisé pour la première égalité la définition de u_{n+1} et pour la deuxième égalité l'hypothèse de récurrence $P(n)$. On en déduit donc que $P(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion. On a prouvé que $P(0)$ est vérifiée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \implies P(n+1)$. On en déduit donc par principe de récurrence que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

On souhaite montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(1 - n)$.

1. Écrire précisément le **début** de la preuve par récurrence jusqu'à l'utilisation de l'hypothèse de récurrence (incluse). Indice : Pour l'hérédité il faut considérer l'hypothèse vraie à deux rangs consécutifs.
2. (Bonus) Finir la preuve.

Réponse.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n) : u_n = 2^n(1 - n)$.

Initialisation. On observe que $2^0(1 - 0) = 1 = u_0$ et $2^1(1 - 1) = 0 = u_1$. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiées.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ et $P(n + 1)$ sont vérifiées. Prouvons que $P(n + 2)$ l'est aussi. On observe que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \\ &= 4 \cdot 2^{n+1}(1 - (n + 1)) - 4 \cdot 2^n(1 - n) \\ &= 2^{n+2}(-2n + n - 1) \\ &= 2^{n+2}(-n - 1) \\ &= 2^{n+2}(1 - (n + 2)), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la première égalité la définition de u_{n+2} et pour la deuxième égalité les hypothèses de récurrence $P(n)$ et $P(n + 1)$. On en déduit donc que $P(n + 2)$ est vérifiée.

Conclusion. On a prouvé que $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiées mais également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \wedge P(n + 1) \implies P(n + 2)$. On en déduit donc par principe de récurrence (double) que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.