

Master 1 Informatique – Compléments de maths CC 2 – théorie des groupes

NOM: _____	Prénom: _____	Num. Étu.: <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text" value="2"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>
------------	---------------	---

Exercice 1.

Soit G un groupe, H un sous-groupe de G . Prouver la proposition suivante : pour tout $g \in G$, l'ensemble $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}, h \in H\}$ est un sous-groupe de G .

Réponse.

Soit $g \in G$. Montrons que gHg^{-1} est un sous-groupe de G . Pour cela il suffit de prouver que gHg^{-1} contient l'élément neutre et que gHg^{-1} est stable par inverse et composition.

Élément neutre. On observe que $e = gg^{-1}$ car g^{-1} est l'inverse de g . Donc $e = gg^{-1} = geg^{-1}$. Or H est un sous-groupe de G donc $e \in H$ et donc $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$. Donc gHg^{-1} contient l'élément neutre.

Stabilité par inverse. Soit $h \in H$. Montrons que $(ghg^{-1})^{-1} \in gHg^{-1}$. L'inverse de ghg^{-1} est $(ghg^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h^{-1}g^{-1} = gh^{-1}g^{-1}$. Or H est un sous-groupe de G donc par stabilité par inverse $h^{-1} \in H$ et donc $(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$. Donc l'ensemble gHg^{-1} est stable par inverse.

Stabilité par composition. Soit $h_1, h_2 \in H$. Montrons que $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) \in gHg^{-1}$. On observe que $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1(g^{-1}g)h_2g^{-1} = gh_1eh_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1}$ où l'on a utilisé pour la première égalité l'associativité, pour la seconde, le fait que g^{-1} est l'inverse de g et enfin la neutralité de e . Or H est un sous-groupe de G donc $h_1h_2 \in H$ par stabilité par composition. On en déduit donc que $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ et donc que gHg^{-1} est stable par composition.

Puisque les trois propriétés sont vérifiées, on en déduit que gHg^{-1} est un sous-groupe de G .

Exercice 2.

On considère le groupe G et le sous-ensemble $H \subset G$ définis par :

$$G = (\mathbb{Z}, +) \quad \text{et} \quad H = \{\text{nombre} \text{ impairs}\}.$$

Le sous-ensemble H est-il un sous-groupe ? Justifier.

Réponse.

Le sous-ensemble H n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. En effet H n'est pas stable par addition. Contre-exemple : $1 \in H$ mais $1 + 1 = 2 \notin H$.

Même si la réponse précédente suffit, on peut également observer que 0 n'appartient pas à H , ce qui donne une autre raison de dire que H n'est pas un sous-groupe.