

## MIN17101 Compléments de maths – Examen

- Durée : 1h30.
- Vous rédigerez les parties 1 et 2 sur deux feuilles séparées en écrivant en haut AA pour la partie 1 et CP pour la partie 2.
- Les seuls documents autorisés sont une feuille recto-verso pour chacune des parties (AA et CP). Aucun appareil électronique autorisé.
- **Toute réponse doit être justifiée.** La qualité et la précision de la rédaction seront largement pris en compte dans la notation.
- Le sujet est **recto-verso** (4 exercices).

### Partie 1 – Algèbre et arithmétique (AA)

**Exercice 1** (Algèbre – Structure multiplicative de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ). Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

1.  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$  forme-t-il un groupe ?
2. Soit  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Quel est le nom de la propriété suivante :  $\exists y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \times y = 1$  ?
3. On considère le sous-ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \times y = 1\}.$$

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times, \times)$  forme-t-il un groupe ?
4.  $(\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}, +, \times)$  forme-t-il un corps ?
5. Que vaut  $|\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}^\times|$  ?

**Exercice 2** (Arithmétique).

1. (a) Décrire l'ensemble des solutions  $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation  $42x + 145y = 5$ .  
(b) L'équation  $42x + 146y = 7$  admet-elle une solution ?
2. (a) Si  $x \equiv 12 \pmod{16}$ , à combien est congru  $x$  modulo 4 ?  
(b) Le système d'équations suivant admet-il une solution dans  $\mathbb{Z}$  ?

$$\begin{cases} x \equiv 12 \pmod{16} \\ x \equiv 9 \pmod{15} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

## Partie 2 - Combinatoire et Probabilité (CP)

**Exercice 3** (Combinatoire). Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté à  $n$  sommets avec  $V = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . On note  $\deg(s_i)$  le degré du sommet  $s_i$ . Dans cet exercice il n'y a jamais de boucle (arête d'un sommet vers lui même).

1. Pour chacune des valeurs de  $n$  de 1 à 5, pouvez-vous donner un graphe dont tous les sommets sont de degré un ?
2. Pour  $n \geq 1$  donner formellement les arêtes d'un graphe dont tous les sommets sont de degré **un** ou alors prouver formellement que ce n'est pas possible.
3. Même question que précédemment mais tous les sommets doivent être de degré **deux**.
4. Pour un graphe à  $n$  sommets, les degrés possibles vont de 0 à  $n - 1$ . Est-il possible d'avoir un graphe dont tous les sommets sont de degrés différents. ?

**Exercice 4** (Probabilité). Soit  $X$  une v.a. sur l'espace d'état  $E_X = \{1, 2, 3\}$ . On note  $\forall i \in E_X$ ,  $p_i = \mathbb{P}[X = i]$ .

1. Quelles conditions doivent satisfaire  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  pour que la v.a.  $X$  soit correctement définie ?
2. Calculer  $m$  la moyenne de  $X$ .
3. Quelles doivent être les valeurs des  $p_i$  pour que  $m = 1$  ?
4. Quelle sont les valeurs min et max que peut prendre  $m$  ?

On considère maintenant la variable aléatoire  $X_2$  qui suit une loi Bernoulli( $p$ ).

5. Soit  $Z = X_1 \times X_2$ , donner l'espace d'état de  $Z$  ainsi que sa fonction de densité.
6. Est-il possible que  $Z$  suive une loi uniforme ? Si oui donner les valeurs des  $p_i$  et de  $p$  en justifiant, si non prouvez le.